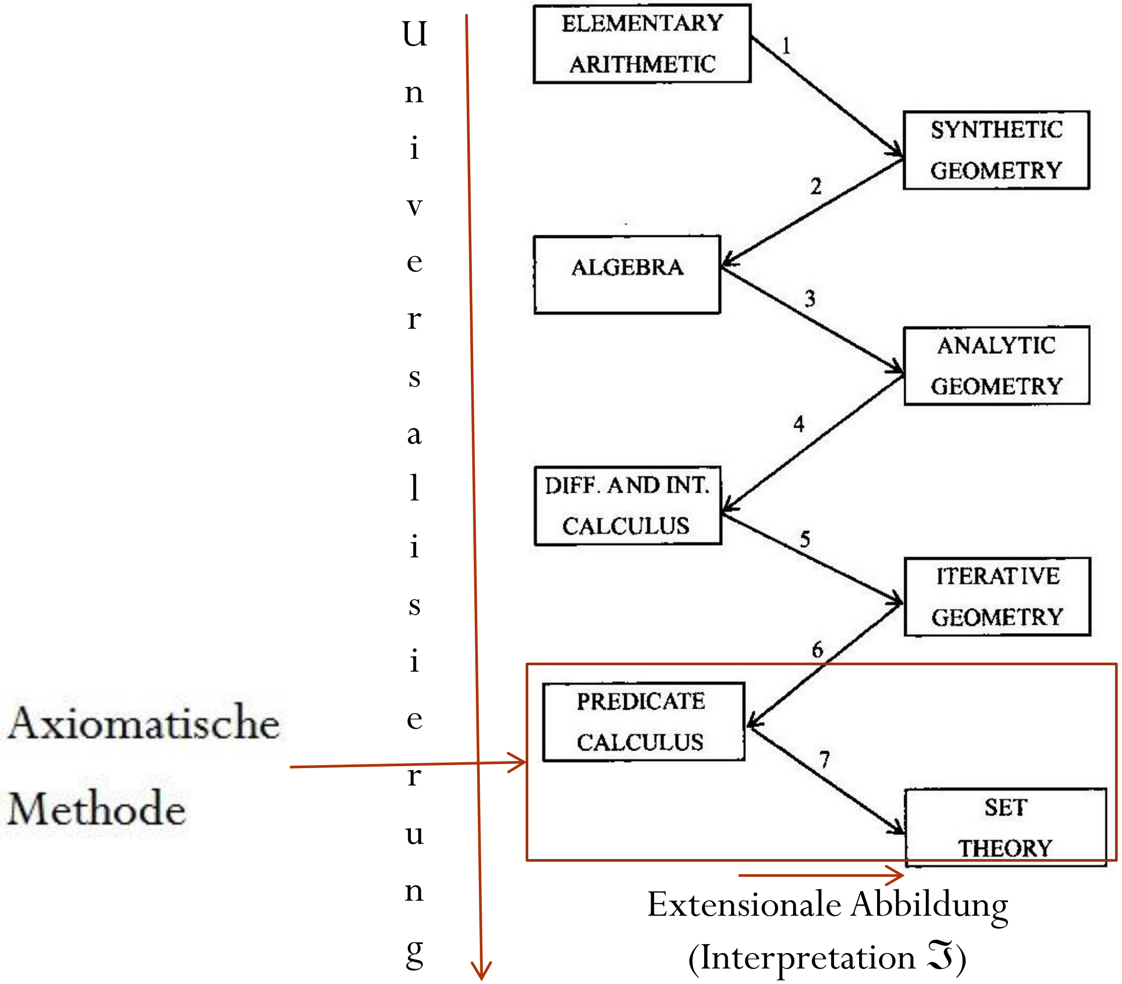
Mathematische Logik: Entstehung

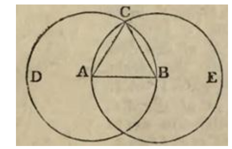
VL: Finitismus

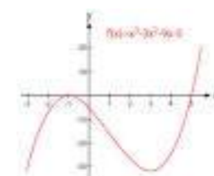
PD Dr. Timm Lampert

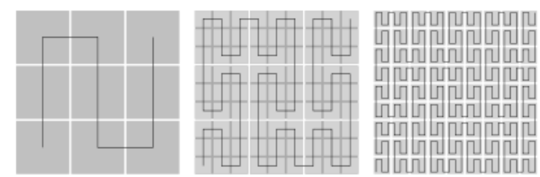
Humboldt Universität Berlin

Kvasz: Pattern of Change, S. 86



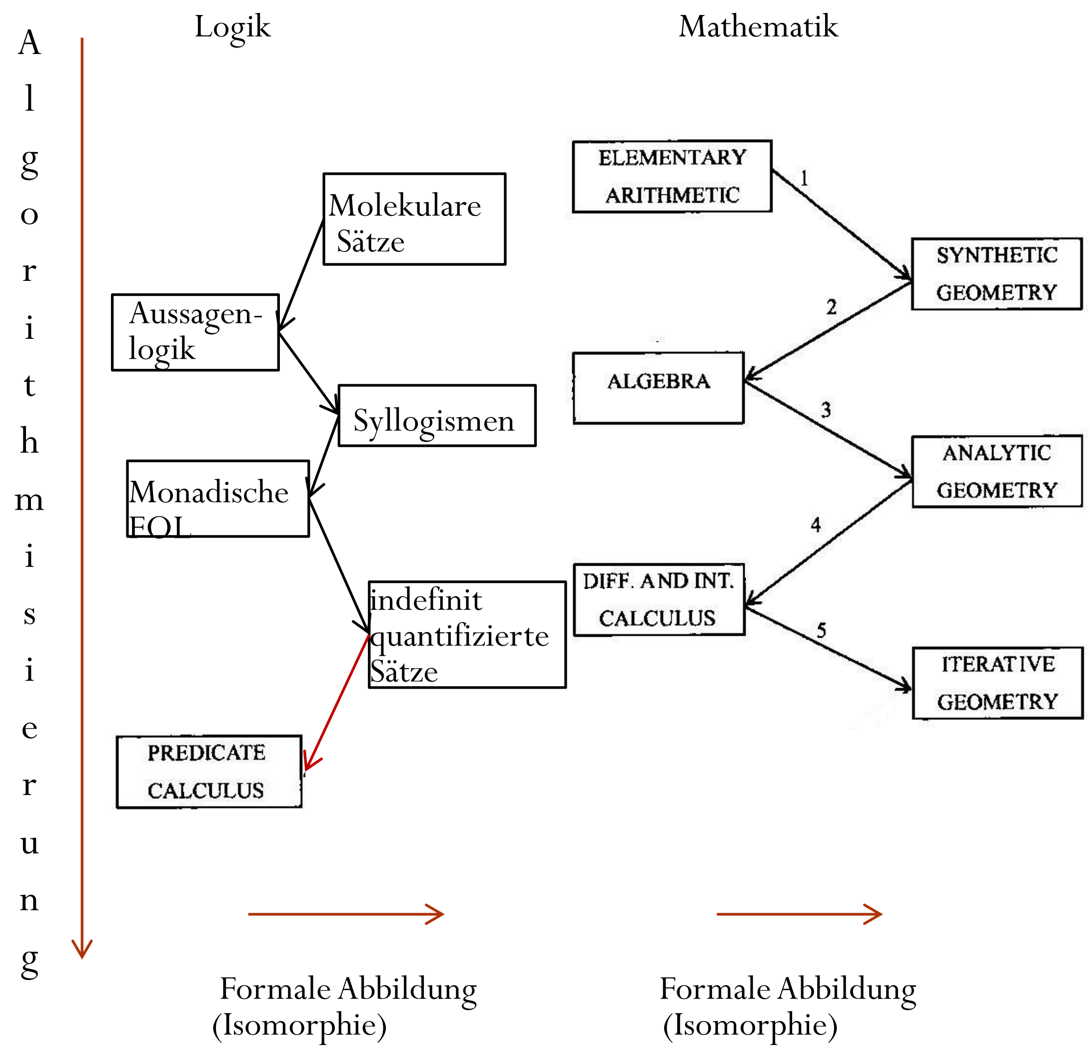






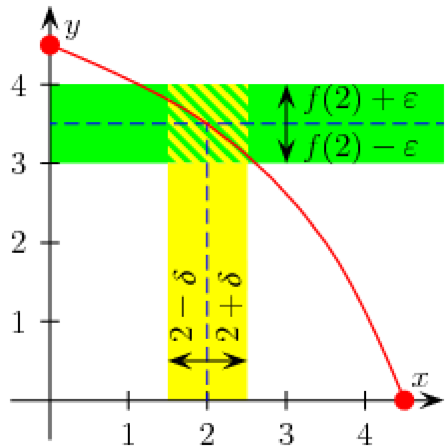
Finitistische Patterns of Change

Algorithmische Beweise



Stetigkeit, Konvergenz, Quantifikation

- Stetigkeit: $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \mid x - x_0 \mid < \delta \rightarrow \mid f(x) - f(x_0) \mid < \epsilon$
- Konvergenz: $\forall \epsilon_{>0} \exists n_0 \forall n_{\geq n_0} \forall m_{\geq n_0} (\mid f(n) - f(m) \mid < \epsilon)$



- Vollständigkeit: „*Alle* Punkte müssen beim Grenzwertprozess erfasst werden."
- Werte der Variable müssen nicht mathematisch konstruiert werden!

Rennbahnparadoxie

Start Ziel

$\frac{1}{2}+$ $\frac{1}{4}+$ $\frac{1}{8}+\ldots$ $=1$

Lösung 1: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots\neq 1$

Lösung 2: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=1$

Lösung 3: $\lim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\lim(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\ldots)=1$

Lösung 2
Sainsbury, *Paradoxien*, S. 21 :

„In formaler Logik geschulte Leser werden […] einen Fehlschluss der Quantorenverschiebung erkannt haben: Man kann eine ∃∀-Konklusion nicht aus der entsprechenden ∀∃-Prämisse schließen.

[Wenn wir eingesehen haben], dass eine unendliche Reihe von endlichen Zahlen eine endliche Summe hat, […], dann sollten wir auch mit der Vorstellung zufrieden sein, dass eine unendliche Ansammlung von endlich großen Raumteilen einen endlich großen Raum bilden kann.“

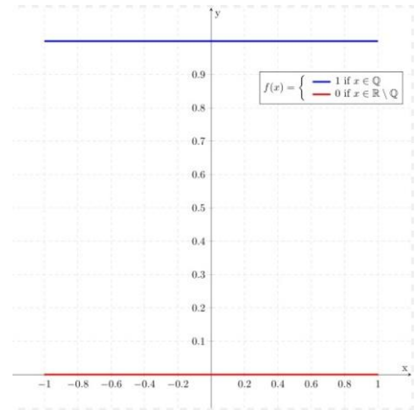
$$\boxed{\forall \epsilon > 0 \exists n_0} \forall n \geq n_0 \forall m \geq n_0 (| f(n) - f(m) | < \epsilon)$$

$$\nvdash$$

$$\boxed{\exists n_0 \forall \epsilon > 0} \forall n \geq n_0 \forall m \geq n_0 (| f(n) - f(m) | < \epsilon)$$

Dirichilets Funktion

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \text{ rational }, \\ 0, & \text{wenn } x \text{ irrational }. \end{cases}$$



Frege: „Man ist […] genötigt worden, zu der Wortsprache seine Zuflucht zu nehmen, da die Zeichensprache der Analysis versagt, wenn z.B. von einer Funktion die Rede war, deren Wert für rationale Argumente 1 und für irrationale 0 ist."

$\Rightarrow$ Zahlen und Funktionen, die nicht über mathematische Gleichungen und Operationen definiert werden.

$\Rightarrow$ neuer, universaler Symbolismus ist von Nöten

Banach-Tarski Paradox

ZFC |- 

Lösung 1: ZFC ist inkonsistent

Lösung 2 (klassisch): Es gibt nicht messbare Punktmengen

Lösung 3 (finitistisch): mengentheoretische Modellung der Geometrie erzeugt Scheinprobleme, Reduktion auf konstruierbare Körper löst Scheinprobleme

Unlösbarkeit des Messproblems setzt mengentheoretische Modellierung voraus.

Funktionsbegriff

- Newton, Euler, Lagrange: stetige und differenziebare Rechenvorschrift „veränderlicher Größen“
- Fourier, Dirichilet, Frege: eindeutige Zuordnung zwischen Elementen zweier Mengen
- Fourier, *Théorie analytique de la chaleur , 1822*: „Es wird keineswegs angenommen, dass diese Ordinaten einem gemeinsamen Gesetz unterworfen sind; sie folgen einander auf irgendeine Weise und jede Ordinate ist so gegeben, als wäre sie allein gegeben.“
- Hausdorff: Eine zweistellige Relation F wird Funktion genannt, wenn für alle a, b, c gilt: wenn $(a,b) \in F$ und $(a,c) \in F$, dann $b = c$.

Frege: „Funktion und Begriff“

„Wie ist nun die Bedeutung des Wortes Funktion beim Fortschreiten der Wissenschaft erweitert worden?

Erstens ist der Kreis der Rechnungsarten erweitert worden, … Zweitens ist der Kreis dessen erweitert worden, was als Argument und Funktionswert auftreten kann. … In beide Richtungen gehe ich nun weiter.

Zunächst nehme ich zu den Zeichen +,- usw. […] noch Zeichen wie =,>,< hinzu. […] Wir sehen daraus, wie eng das, was in der Logik Begriff genannt wird, zusammenhängt mit dem, was wir Funktion nennen. […] Ein Begriff ist eine Funktion, deren Wert immer ein Wahrheitswert ist. […]

Wir sehen, dass hier zugleich eine Erweiterung in der anderen Richtung vorgenommen wird ist, nämlich hinsichtlich dessen, was als Argument auftreten kann. Es sind nicht mehr bloß Zahlen zuzulassen, sondern Gegenstände überhaupt. Als mögliche Funktionswerte sind schon vorhin die beiden Wahrheitswerte eingeführt. Wir müssen weiter gehen und Gegenstände ohne Beschränkung als Funktionswerte zulassen.“

Mengentheoretische Paradoxien

Cantors Paradox:

F(x):= x ist eine Menge

Russells Paradox:

F(x):= x ist eine normale Menge

Lösung 1 (klassisch): Aufgabe der naiven Mengenlehre zu Gunsten von ZFC

Lösung 2 (finitistisch): Aufgabe des allgemeinen Funktionsbegriffes zu Gunsten der Unterscheidung materialer und formaler Begriffe

Kronecker, Brief an Cantor 21.8.1884

„[…] ich [habe] die Unsicherheit aller jener Spekulationen erkannt und mich in den sicheren Hafen der Mathematik geflüchtet. Was war natürlicher, als dass ich in dieser Mathematik nun selbst mich bemüht habe, ihre Erscheinungen oder ihre Wahrheiten möglichst frei von jeden philosophischen Begriffsbildungen zu erkennen. […] wo es gelungen ist, sehe ich daran einen wahren Fortschritt, obwohl – oder weil – es ein Rückschritt zum Einfachsten ist, noch mehr aber deshalb, weil es beweist, dass die neuen Begriffsbildungen nicht *notwendig* sind. […] Einen wahren wissenschaftlichen Werth erkenne ich […] 'nur in mathematischen Formeln'. Diese allein sind, wie die Geschichte der Mathematik zeigt, das Unvergängliche. Die verschiedenen Theorien für die Grundlagen der Mathematik sind […] von der Geschichte weggeweht […]".

Das System der mathematischen Logik

S10: Churchs Theorem

S9: Metamathematik (U-beweise)

S8: Rekursionstheorie

S7: Modell- und Beweistheorie

S6: Beweiskraft logischer Paradoxien

S5: Axiomatische Methode

S4: „Logisch-axiom." Systeme: GA, PM, ZF, PA

S3: Logisierung der Mathematik

S2: Mengentheoretische Interpretation

S1: Mathematisierung der Logik

Mathematisierung der Logik

Boole, Morgan, Venn, Jevons, Schröder:

- Einführung einer Formelsprache nach dem Vorbild der Algebra für Syllogismen (Aristoteles) und Aussagenverknüpfungen (Stoa)
- Erweiterung um mehrstellige Prädikate

⇒pure FOL: keine math. Funktionssymbole, keine Identität

⇒ $\boxed{\text{Satzformen}}$

$\boxed{\text{FOL}}$

Mengentheoretische Interpretation

Deskriptives Paradigma	**Algorithmisches Paradigma**
$\mathfrak{I}(\varphi) = WW$	$\varphi \Rightarrow \varphi^*$
φ = totes Zeichen	φ = Konstruktionsanweisung
$\mathfrak{I}(\varphi)$ = mengentheoretische Interpretation von φ	Algorithmische Interpretation von φ

Logisierung der Mathematik

Grundlagenprogramme I: Reduktion mathematischer Sprache auf logische Fundamentalsprachen zum Zwecke der Repräsentation mathematischer Sätze mit wenigen Grundzeichen

Namen	**Schule**	**Sprache**
Frege, Russell	Logizismus	FOL
Zermelo, Fraenkel	Mengentheorie	ZF: FOL, $\in$
Peano, Hilbert	Formalismus	L_A: FOL, $+$, $\cdot$, S, 0, $=$

Logische-axiomatische Systeme

Grundlagenprogramme II: Axiomatisierung zum Zwecke des Beweisens mathematischer Sätze aus wenigen Grundannahmen

Namen	Schule	Sprache
Frege, Russell	Logizismus	GA, PM
Zermelo, Fraenkel	Mengentheorie	ZFC
Peano, Hilbert	Formalismus	Q, PA

Axiomatische Methode

Repräsentation + axiomatischer Beweis

Logizismus | Mengenlehre | Formalismus

Logische Paradoxien

Ramsey, *Foundations of Mathematics 1925*:

Logische Paradoxien: „contradictions which, were no provision made against them, would occur in a logical or mathematical system itself. They involve only logical or mathematical terms such as class and number, and show that there must be something wrong with our logic or mathematics.“

Semantische Paradoxien: “due not to faulty logic or mathematics, but to faulty ideas concerning thought and language”

Mengentheoretische Paradoxien ⇒ PM, ZFC

Semantische Paradoxien ⇒ Meta-Objektsprache

Paradoxien betreffen nicht die Allgemeinheit des Funktionsbegriffes!

Logische Paradoxien sind repräsentierbar und nur durch eine korrekte Axiomatisierung auszuschließen.

Modelltheorie

S ist logisch wahr:=

1. $\mathfrak{I}(\varphi) = WW$ von S, und
2. $\forall \mathfrak{I}(\mathfrak{I}(\varphi) = W)$

- keine formale Eigenschaft
- mengentheoretische Axiome vorausgesetzt
- Weder Synonym noch Kriterium, sondern „Ersatz in uns genehmen Begriffen“ (Quine)!

Beweistheorie

Priorität der Semantik			
K ist korrekt :	$\forall \mathfrak{I}(\mathfrak{I}(\varphi)=W)$	$\Leftarrow$	$\vdash \varphi$
K ist vollständig:	$\forall \mathfrak{I}(\mathfrak{I}(\varphi)=W)$	$\Rightarrow$	$\vdash \varphi$
T ist widerspruchsfrei:	$\exists \mathfrak{I}(\mathfrak{I}(T)=W)$		

- Formale Eigenschaften werden an materialen gemessen.
- Entscheidbarkeit?

Rekursionstheorie

Definition berechenbarer Funktionen durch rekursive Funktionen:

1. Die Nachfolgerfunktion S, die Nullfunktion Z und die Identitätsfunktion I ist rekursiv.
2. Wenn f durch die rekursive Funktionen g und h durch *Komposition* definiert werden kann, dann ist f rekursiv.
3. Wenn f durch die rekursiven Funktionen g und h durch *Rekursion* definiert werden kann, dann ist f rekursiv.
4. Wenn g eine reguläre rekursive Funktion ist, und f durch g durch *reguläre Minimierung* definiert werden kann, dann ist f rekursiv.
5. Nichts anderes ist eine rekursive Funktion.

Extensionalität

Smith, *Gödel's Theorem*, S. 88:

F(n)= *n*, wenn $x^{n+3} + y^{n+3} = z^{n+3}$ lösbar in *N*;

F(n)= *0* sonst.

Extensionalität rekursiver Funktion Voraussetzung ihrer Repräsentation in L_A!

Theorem T: Jede rekursive Funktion f_r kann in L_A durch einen Relationsaudruck ϕ repräsentiert und in *Q* eingefangen werden.

Beweis: Angabe eines effektiven Formalisierungsverfahrens.

Voraussetzung: Extensionsgleichheit von rekursiven Relationen und Relationsausdrücken in L_A.

L_A-Formalisierung

n! wird definiert durch:

$$0! = 1$$
$$(Sx)! = x! \times Sx$$

Und in L_A formalisiert durch:

$$\exists c \exists d (\exists u \leq c)(c = S(d \times u) + S0 \wedge S0 \leq (d \times S0)) \wedge$$
$$(\forall u \leq x)(u \neq x \rightarrow \exists v \exists w ((\exists z \leq c)(c = S(d \times z) + v \wedge v \leq (d \times Su)) \wedge$$
$$(\exists z \leq c)(c = S(d \times z) + w \wedge w \leq (d \times SSu)) \wedge w = v \times Su)) \wedge$$
$$(\exists z \leq c)(c = S(d \times z) + y \wedge y \leq (d \times Sx)))$$

Churchs-These

Funktionen

berechenbare Funktionen   nicht-berechenbare Funktionen

Churchs These: Die berechenbaren Funktionen sind die rekursiven Funktionen.

Welche Funktionen sind nicht-berechenbar?

Eine numerische Eigenschaft ist entscheidbar gdw. ihre charakteristische Funktion berechenbar ist.

Welche Eigenschaften sind entscheidbar?

Extensionalität und Church These

Dreben, Goldfarb, *The Decision Problem*, S. 1:

„We identify effectiveness with recursiveness or Turing computability. Thus solvability requires only that some recursive decision procedure exists; whether or not we know how to specify such a procedure is immaterial.

This has an unintuitive consequence: every finite class of formulas […] is solvable.“

Vgl. Börger et al., *The Classical Decision Problem*, S. 239:

„… looking up the answer in a table.“

Repräsentation von „G ist nicht in PA beweisbar“ durch G

Ist die Eigenschaft der Beweisbarkeit in PA entscheidbar?

1. Gödelisierung: Zuordnung von Formeln zu Zahlen
2. Rekursive Definition von „*x* ist PA-Beweis von *y*“ (B^*) (Def.44)
3. Logische Formalisierung von B^* (B): $B^*(x,y) \Rightarrow B(x,y)$
4. Diagonalisierung:
   - Rekursive Definition der Diagonalisierung: $diag^*(y)$.
   - Logische Formalisierung von $diag(y)$: $diag^*(y) \Rightarrow diag(y)$.
   - l = Gödelzahl von $\neg\exists x\, B(x, diag(y))$
5. G: $\neg\exists x\, B(x, diag(l))$ *(kurz:* $\neg\exists x\, B(x, G)$*)*
6. $\mathfrak{I}(G)$ = WW von „G ist nicht in PA beweisbar“

Gödels Theorem

„G, d.i. $\neg\exists x B(x,G)$, ist nicht in PA beweisbar" ist in L_A repräsentierbar, aber nicht entscheidbar, wenn PA ω- widerspruchsfrei ist.

$|\!- \neg\exists x\, B(x,G) \rightarrow$ PA widersprüchlich.

Zeile	**Satz**	**Regel**
(1)	$\|\!- \neg\exists x B(x,G)$	AE
(2)	$B^*(k,G)$	Def. 44
(3)	$\|\!- B(k,G)$	(T)
(4)	$\|\!- \exists x B(x,G)$	$\exists$E

Folglich : $|\!-\neg B(0,G)$, $|\!- \neg B(1,G)$, ….

Demnach:

$|\!- \exists x B(x,G) \rightarrow$ PA ω-widersprüchlich.

Churchs Theorem

- Wenn FOL entscheidbar, dann wäre
  - G entscheidbar
- Beweis:
  1. $\neg$ G -||-$\sum$1-Formel G*
  2. Q ist $\sum$1-vollständig: G* ist wahr gdw. Q|-G*
  3. Q|- G* $\Leftrightarrow$ |- Q*$\rightarrow$ G** (Q*, G**: FOL-Ausdrücke).

➢ Voraussetzung: Korrektheit der effektiven logischen Formalisierung rekursiver Funktionen.