Grundlegung einer Algorithmischen Mathematik
Eine Diskussionsgrundlage

Timm Lampert, Karsten Müller*

18. Mai 2019

Inhaltsverzeichnis

*Timm Lampert ist für den philosophischen Gesamtentwurf sowie für die Abschnitte 1 - 7.1 verantwortlich. Abschnitte 7.2 - 7.6 beruhen auf gemeinsamer Arbeit. Die mathematischen Ideen zu den Abschnitten 7.7 und dem Anhang stammen von Karsten Müller, der Text weitgehend von Timm Lampert.

1 Vorbemerkung

Dieser Text soll als Diskussionsgrundlage dienen. Er scheut keine Zuspitzung und verschweigt nicht meine Kritik am Unentscheidbarkeitstheorem der Prädikatenlogik 1. Stufe. Mit meiner Kritik an der mathematischen Logik möchte ich mich keinesfalls leichtfertig als Philosoph über wissenschaftliche Forschung erheben. Der Entschluss, meine Kritik an einem anerkannten wissenschaftlichen Theorem publik zu machen, setzt jahrelange, weitgehend "schweigsame" Arbeit voraus, deren Ursprung Wittgensteins Kritik an Unentscheidbarkeitsbeweisen und seine Vermutung der Entscheidbarkeit der Prädikatenlogik 1. Stufe bildet. Die Ergebnisse meiner Arbeit liegen mittlerweile in diskussionsfähiger Form vor, vgl. Näheres unter New Logic Project. Im Gegensatz zu Wittgenstein war mein Anspruch und Bestreben, es nicht bei einer rein philosophischen Kritik und einer bloßen Vermutung zu belassen, sondern ein Entscheidungsverfahren konkret auszuformulieren, in Form eines Computerprogrammes zu implementieren und dessen Korrektheit und Terminierung zu beweisen. Meine folgenden Ausführungen sind durch diese Arbeit motiviert, zielen aber nicht darauf ab, sie zum Thema unserer Diskussion zu machen. Vielmehr geht es darum, einen größeren, programmatischen Rahmen aufzuspannen, der über die Logik hinausgeht und die Grundlegung einer algorithmischen Mathematik betrifft. Ich möchte die Grundzüge eines Forschungsprogrammes entwerfen, das eine Alternative zur mathematischen Logik darstellt.

Um den Entwurf einer Alternative zur mathematischen Logik zu motivieren, werde ich zwar zu Beginn auf ihre Kritik eingehen; Ziel ist dann aber die Darstellung der Grundzüge einer konstruktiven Alternative. Für eine mathematische Diskussion eignet sich insbesondere Abschnitt 7. Anders als meine Arbeit zur Grundlegung einer algorithmischen Logik, ist die Arbeit zur Zahlentheorie allerdings *work in progress*, die mit zunehmender Komplexität von der Zusammenarbeit mit dem Mathematiker und Schachexperten Karsten Müller bestimmt ist. Dies betrifft insbesondere die Abschnitte 7.7 und den Anhang. Wir wollen mit unserer abschließenden alternativen Vermutung zu Khintschins Theorem zeigen, nach welchen Motiven eine algorithmisch betriebene Mathematik Probleme formuliert, Vermutungen aufstellt und mit welchen Methoden sie nach Lösungen sucht. Wir beanspruchen aber nicht, selbst anspruchsvolle Mathematik zu betreiben; unsere Arbeit in der Zahlentheorie ist vor allem von logisch-philosophischen und ästhetischen Motiven bestimmt. Es würde uns freuen, wenn unsere Ausführungen Mathematiker(innen) anregen, in der von uns vorgeschlagenen Richtung weiter zu forschen.

2 Universalität vs. Entscheidbarkeit

Peter Henrici schreibt in Jones/Thron (1980, xix):

> Mathematics derives much of its vitality from the fact that it has several faces, each face having its own sharply distinguished features. One face, which might be called the dialectic face of mathematics, is the face of a scholar, or even a philosopher. It is the face which tells us whether theorems are true or false, and whether mathematical objects with specified properties do or do not exist. Dialectic mathematics is an intellectual game, played according to rules about which there is a high degree of consensus, and where progress can be measured sharply in terms of the *generality* of a result that has been achieved.
>
> There is another, entirely different face of mathematics, which I like to call its algorithmic face. This is the face of an engineer. The algorithmic mathematician tells us how to construct [...] things [...]. The rules of the game of algorithmic mathematics, and in particular the significance attached to results in algorithmic mathematics, depend on the equipment that is available to carry out the required *construction*.

Wer Mathematik betreibt und sich mit ihren Grundlagen auseinandersetzt, wird ein Gefühl für den von Henrici beschriebenen Gegensatz zwischen einer "dialektischen" (besser "axiomatischen") und einer "algorithmischen" Mathematik haben. Problemstellungen, Begrifflichkeiten, Beweistechniken, Theoreme, Forschungsfelder sind von diesem Gegensatz betroffen, auch wenn de facto die beiden "Gesichter" der Mathematik selten trennscharf hervortreten. Wir wollen weder die Mathematik beschreiben, wie sie ist, noch sagen, wie sie sein soll. Uns interessiert vielmehr die konsequente Gegenüberstellung der beiden von Henrici angedeuteten Arten, Mathematik zu betreiben. Für eine axiomatische Mathematik liegt nach unserem Verständnis mit der *mathematischen Logik* eine mittlerweile kanonische Grundlage vor. Die mathematische Logik bedient sich der Sprache der Logik und interpretiert diese mengentheoretisch, um mathematische Probleme und Ergebnisse möglichst allgemein zu formulieren. Obwohl Logik und Mengentheorie aus der Mathematik kaum noch wegzudenken sind, so ist doch oft bemerkt worden, dass es sich eher um grundlagentheoretisch motivierte Formgebung mathematischer Forschung als um eine praktisch relevante Forschung handelt. Bei der algorithmischen Mathematik ist es eher umgekehrt: Hier steht die praktische Relevanz zumeist außer Frage, aber es liegt demgegenüber keine gleichermaßen anerkannte theoretische Grundlegung dieser Art von Mathematik vor. Konstruktivistische und finitistische Ansätze mögen zwar ihrem Geiste nahe stehen, aber weder liegen sie in begrifflich einheitlicher Form vor, noch sind sie in explizitem Gegensatz zur mathematischen Logik ausgearbeitet worden.

Während die meisten modernen Philosophen der Mathematik sowie viele grundlagentheoretisch orientierte Mathematiker sich der mathematischen Logik verpflichtet fühlen, kann Wittgensteins Philosophie der Mathematik als eine Kritik der mathematischen Logik gelesen werden. Meine Ausführungen sind wesentlich von seiner Philosophie der Mathematik bestimmt. Allerdings hat Wittgenstein seinen Ansatz weder systematisch noch detailliert ausgearbeitet. Dies habe ich mir zur Aufgabe gemacht. Nach meinem Verständnis hat Wittgenstein das algorithmische Gesicht der Mathematik vor Augen gehabt und wie kein anderer die tiefgehenden Differenzen zur mathematischen Logik seiner Zeit empfunden. Ohne hier detaillierte Interpretation Wittgensteins zu betreiben, möchte ich im Folgenden einen Überblick über die Grundlagen einer algorithmischen Mathematik im Gegensatz zur mathematischen Logik geben.

Während das oberste Ziel einer axiomatischen Mathematik die Allgemeinheit mathematischer Einsichten ist, ist das oberste Ziel einer algorithmischen Mathematik die Entwicklung von Entscheidungsverfahren. Mathematische Probleme, die nicht durch ein Computerprogramm gelöst werden können, sind nach diesem Verständnis noch nicht wohldefiniert und die Hauptaufgabe der Mathematik besteht darin, Algorithmen zum Zwecke der Lösung mathematischer Probleme zu erfinden. Die Aufgabe einer Grundlegung der algorithmisch betriebenen Mathematik besteht darin, den begrifflichen Rahmen zu liefern, der die Mathematik von unentscheidbaren Problemen befreit und es stattdessen möglich macht, mathematische Probleme zu entscheiden. Aus dem Blickpunkt einer axiomatischen Mathematik wird man befürchten, dass der Mathematik hierdurch etwas verloren geht, ihr Gegenstandsbereich zu sehr eingeschränkt und sie allzu sehr auf das "niedere" Gebiet dessen, was sich berechnen lässt, reduziert wird. Dies soll hier gar nicht bestritten werden; insbesondere für eine Grundlegung der Analysis hat sich der axiomatische Ansatz als sehr fruchtbar und elegant erwiesen. Nach unserem Verständnis ist es aber fruchtbarer, unterschiedliche Ansätze konsequent auszuformulieren und zu vergleichen, als einem Ansatz von vorneherein seine Berechtigung auf Grund nicht geteilter Maxime abzusprechen. Ein Hauptanliegen einer Grundlegung einer algorithmischen Mathematik besteht aber auch darin aufzuzeigen, dass eine auf Kosten der Entscheidbarkeit nach Allgemeinheit strebende Mathematik auch ihren Preis hat. Dies gilt zumindest auf dem Gebiet der Metamathematik. Das Streben, die Grenzen des Berechenbaren mit mathematischen Mitteln auszuloten, ist hier nicht vor tiefgreifenden Irrtümern gefeit und läuft Gefahr, das Lösen mathematischer Probleme philosophischen Interessen zu opfern. Nach einem algorithmischen Verständnis von Mathematik ist die Aufgabe der Mathematik das Bereitstellen von Algorithmen zum Zwecke wissenschaftlicher Modellbildung und Aufgabe der Philosophie, die Mathematik von philosophischen Problemen, die eine genuin mathematische Arbeit belasten, zu befreien bzw. fern zu halten.

Die folgenden Ausführungen streben nicht an, eine umfassende Grundlegung einer algorithmischen Mathematik zu geben. Ziel ist vielmehr in der Logik und der Zahlentheorie einem axiomatischen den algorithmischen Ansatz gegenüber zu stellen. Die Ausführungen zur Logik kulminieren in der Kritik des Church-Turingschen Unentscheidbarkeitstheorem der Prädikatenlogik 1. Stufe, die zur Zahlentheorie in einer konstruktiven Alternative zu Khintschins Theorem zum Maß der rationalen Approximierbarkeit reeller Zahlen.

3 Das Paradigma der mathematischen Logik

Kvasz (2008) stellt in Anlehnung an Frege (1891, 25f.) die Entwicklung der Mathematik anhand der Entwicklung ihrer Sprache dar. Die Sprache der Logik (= Prädikatenlogik 1. Stufe, kurz FOL für "first-order logic") samt ihrer mengentheoretischen Interpretation bilde dabei den krönenden Abschluss einer Entwicklung zu einer universellen Sprache, die es erlaube, selbst die Grenzen des Berechenbaren zu bestimmen. Mit der Sprache der Logik hält ein allgemeiner, mengentheoretischer Funktionsbegriff Einzug in die Mathematik. Definitions- und Wertebereich sind nicht mehr auf Zahlen oder geometrische Objekte beschränkt, sondern können beliebig gewählt werden; die Zuordnung muss nicht mehr im Sinne einer genuin mathematischen Rechenvorschrift angegeben werden, sondern kann in einer beliebigen Zuordnung zwischen Elementen zweier Mengen bestehen. Mit der Mengentheorie ist auch das Verständnis von Unendlichkeit ein rein extensionales. Unendlichkeit wird als die Kardinalität einer Menge aufgefasst und ist nicht gebunden an eine Regel, die angibt, *wie* ein beliebig weiteres Element mit genuin mathematischen Mitteln *konstruiert* werden kann. Sie wird damit wie eine Zahl verstanden, und es kann sogar unterschiedliche transfinite Zahlen geben. Auch der Zahlbegriff ist nicht mehr gebunden an bestimmte mathematische Rechenausdrücke oder Gleichungen. Reelle Zahlen werden über beliebige Folgen definiert, die sich einem Grenzwert nähern, wobei – wie im Fall der Definition der Stetigkeit über das ϵ/δ-Kriterium – in der Formulierung des Grenzwertkriteriums logische Quantoren verwendet werden. Eine entschränkte Quantifikation über einen Gegenstandsbereich, in dem die Gegenstände nicht einzeln benennbar sein müssen und nur als Elemente einer Menge von Gegenstände zusammengefasst werden, ohne in einem erkennbaren Zusammenhang stehen zu müssen, ist ein wesentliches Merkmal einer axiomatischen Mathematik.

Mit der logischen Grundlegung der Mathematik wird die logisch-axiomatische Methode zur vorherrschenden Beweismethode. Diese besteht aus zwei Schritten: Erstens aus der logischen Formalisierung eines Themenbereiches (z.B. Arithmetik). Hierfür muss einerseits festgelegt werden, wie logische Formeln zu interpretieren sind, um die Sätze des entsprechenden Themenbereiches zu repräsentieren. Andererseits müssen Axiome festgelegt werden, deren Interpretationen die Grundannahmen und damit die Theorie des Themenbereiches ausmachen. Zweitens besteht die logisch-axiomatische Methode in der logischen Ableitung von Theoremen aus Axiomen. Dies ist der eigentliche, formale Teil eines Beweises. Die Beweismittel werden durch die Logik bereitgestellt. Ziel der logisch-axiomatischen Methode ist der Beweis der Wahrheit von Sätzen in Form interpretierter Theoreme unter Voraussetzung von Axiomen.

Mit der logisch-axiomatischen Methode wird nicht nur ein allgemeiner begrifflicher Rahmen für einzelne Gebiete der Mathematik wie Arithmetik, Algebra, Analysis und Geometrie, sondern für wissenschaftliche Beweise überhaupt bereitgestellt. Einzelne Theorien unterscheiden sich nur noch durch Axiome und Theoreme sowie deren Interpretationen, während die formale Sprache der Logik und ihre Beweismittel universell und für alle wissenschaftlichen Beweise maßgeblich sind.

Diese Universalität hat jedoch ihren Preis. Mit dem Einzug eines extensionalen Verständnisses von Unendlichkeit in der Zahlentheorie ist z.B. das Reich der reellen Zahlen dominiert von Zufallsfolgen, die sich einer konkreten Berechnung entziehen. Wie wir in Abschnitt 7.6 sehen werden, lassen allgemeine, statistische Aussagen über die Verteilung von Zahlen keine Rückschlüsse über konkrete, konstruierbare reelle Zahlen zu. Auch der Bereich der Logik sowie der Bereich der logisch formalisierten Mathematik ist direkt von Unentscheidbarkeitstheoremen betroffen. Nach dem Church-Turing Theorem ist die Eigenschaft der Beweisbarkeit von FOL-Formeln nicht voll entscheidbar.[1,2] Auch für dieses Theorem gilt, dass die allgemeine Aussage der Unentscheidbarkeit keinerlei Rückschlüsse auf eine konkrete unentscheidbare Formel zulässt. Jede beliebige endliche Klasse prädikatenlogischer Formeln ist vielmehr entscheidbar. Dies folgt allein daraus, dass es in diesem Falle eine endliche Tabelle gibt, die den Formeln den richtigen Wert (z.B. 1 für "beweisbar" und 2 für "nicht beweisbar") zuordnet; es muss kein Verfahren geben, das entscheidet, welche unter derartigen Tabellen die "richtige" ist. Etwas anders verhält es sich mit Gödels 1. Theorem, das besagt, dass logische Formalisierungen der Arithmetik (z.B. die Peano-Arithmetik) unentscheidbar sind. Hier bezieht sich der Unentscheidbarkeitsbeweis auf eine konkrete Formel, die sich konstruieren lässt. Allerdings beruht der Beweis ihrer Unentscheidbarkeit wie der des Church-Turing Theorems auf *Interpretationsannahmen* der so konstruierten logischen Formeln und damit auf dem 1. Schritt der logisch-axiomatischen Methode. Es sind nicht formale Überlegungen zur Beweisbarkeit konkreter Formeln, die Unentscheidbarkeitstheoreme begründen, sondern inhaltliche Überlegungen zur Repräsentation selbstbezüglicher Sätze über die Beweisbarkeit bestimmter Formalisierungen. Die Zulässigkeit derartiger Interpretationen im Rahmen des Paradigmas der mathematischen Logik beruht auf dem Bestreben nach einer möglichst weitreichenden, universalen Anwendung der Sprache der Logik, die selbst noch metamathematische Aussagen umfassen soll, die erlauben, die Grenzen der Berechenbarkeit zu bestimmen.

Nach dem hier zu Grunde gelegten Verständnis einer algorithmischen Mathematik ist nicht nur der Preis der Berechenbarkeit, der für die Allgemeinheit der erzielten Ergebnisse bezahlt wird, zu hoch, sondern es bedarf auch eines Korrektivs oder Kriteriums, anhand dessen sich sowohl die Zulässigkeit eines extensionalen Verständnisses der Unendlichkeit in der Zahlentheorie als auch die Zulässigkeit von Interpretationen logischer Formeln, insbesondere selbstbezüglicher, bemisst. Dies ergibt sich zum einen aus den

[1]FOL gilt als semi-entscheidbar: Wenn eine Formel beweisbar ist, dann kann dies auch nach endlichen Schritten durch ein Programm entschieden werden. Wenn eine Formel hingegen nicht beweisbar ist, kann dies nicht in jedem Falle entschieden werden. Tatsächlich finden moderne logic-engines (siehe unter http://www.cs.miami.edu/ tptp/cgi-bin/SystemOnTPTP) im Falle der Beweisbarkeit nach endlichen Schritten Beweise; im Falle nicht beweisbarer Formeln wird dies zumeist entweder durch Angabe einer endlichen widerlegenden Interpretation entschieden, oder die Entscheidungsfindung bricht ab.

[2]Schon ein Fragment von FOL ohne Namenbuchstaben, mathematische Funktionen und Identitätzeichen und mit nur einem einzigen zweistelligen Prädikat gilt als unentscheidbar. Darüber hinaus kann man sich auf bestimmte unentscheidbare Klassen in pränexer Normalform beschränken, z.B. auf die Klasse der Formeln mit dem Pränex $\forall x \exists y \forall z$, vgl. hierzu Boerger et al. (2001).

Paradoxien, die die mathematische Logik von Beginn an wie keine andere Disziplin in Frage stellen, und zum anderen aus der Kritik am Church-Turing Theorem. Letzteres geht auf eine Vermutung Wittgensteins zurück und ist ein zentrales Ergebnis meiner Forschungsarbeit. Die (Un)entscheidbarkeit von FOL stellt den Prüfstein und Kulminationspunkt einer Gegenübergegenüberstellung von einer algorithmischen Grundlegung der Mathematik und der mathematischen Logik dar: Indem konkret nachgewiesen wird, dass und wie sich FOL entscheiden lässt (inklusive der Implementierung eines Computerprogrammes) und wo der Fehler in Turings Beweis der Unentscheidbarkeit liegt, möchte ich zeigen, dass die mathematische Logik in ihrem Bestreben, die Mathematik auf eine allgemeine, logische Grundlage zu stellen, zu weit geht. Diese Kritik am Church-Turing Theorem soll im folgenden Abschnitt kurz dargestellt werden, um den anschließenden Entwurf einer Grundlegung einer algorithmischen Mathematik zu motivieren.

4 Kritik des Church-Turing Theorems

Ich beschränke mich in diesem Abschnitt darauf, den Fehler in Turings Unentscheidbarkeitsbeweis aufzuzeigen. Die konkrete Kritik an Turings Beweis soll ein Fallbeispiel für die allgemeine Kritik an dem Gebrauch von Interpretationen logischer Formeln in der logisch-axiomatischen Methode darstellen. [Eine differenzierte Kritik, die auch ausführlich auf Church's Beweis eingeht, findet sich in Critique of the Church-Turing theorem.]

Turings Unentscheidbarkeitsbeweis beruht auf der logischen Formalisierung der Konfigurationen und Instruktionen von Turing-Maschinen. Turing-Maschinen bestehen aus einem unendlichen Band an Quadraten und einem Schreib- und Lesekopf, der auf diesen Quadraten hin und her fährt, auf einem leeren Quadrat bestimmte Zeichen schreiben kann und Zeichen auf Quadraten auch wieder löschen kann. Gemäß *Turings These* kann eine jede berechenbare Funktion auf eine Funktion zurückgeführt werden, die durch eine Turing-Maschine berechnet werden kann. Dies sei unbestritten. Die Kritik betrifft allein die logische Formalisierung von Turing-Maschinen.

Turing definiert für seinen Unentscheidbarkeitsbeweis ein konkretes Verfahren, nach dem für jede Konfiguration und jede Instruktion einer Turing-Maschine eine spezifische logische Formel aufgeschrieben werden kann, deren intendierte Interpretation die Konfiguration beschreibt bzw. die Instruktion in Form einer Wenn-dann Aussage wiedergibt. Um die logischen Formalisierungen von Turing-Maschinen zu interpretieren, legt Turing fest, wie die in ihnen verwendeten Variablen für propositionale Funktionen durch propositionale Funktionen zu ersetzen sind: die intendierte Interpretation von $Q_i(t)$ lautet: “zum Zeitpunkt t ist die Turing-Maschine im Zustand i”, die von $@(t,x)$: “zum Zeitpunkt t ist die Turing-Maschine am Quadrat x”, die von $M(t,x)$: “zum Zeitpunkt t ist das Quadrat x markiert”. Auf diese Weise bestimmt Turing ein allgemeines Verfahren, die Konfigurationen und Instruktionen von Turing-Maschinen in logische Formeln zu übersetzen, deren intendierte Interpretationen Sätze ergeben, die die entsprechenden Konfigurationen beschreiben bzw. die Instruktionen wiedergeben. Ist die Anfangskonfiguration einer Turing-Maschine z.B. ein leeres Band (was im Unterschied zum modernen Konzept von Turings Maschinen bei Turing immer der Fall ist), lautet die logische Formalisierung $Q_1(0) \wedge @(0,0) \wedge \forall x \neg M(0,x)$, mit der intendierten Interpretation: “zum Zeitpunkt 0 ist die Turing-Maschine im Zustand 1, befindet sich an Quadrat 0 und für alle Quadrate x gilt, dass sie nicht markiert sind”.

Die Formalisierung der Anfangskonfiguration einer Turing-Maschine $\mathcal{M}$ sei mit $In(\mathcal{M})$ abgekürzt, die der Instruktionen von $\mathcal{M}$ mit $Des(\mathcal{M})$. Allgemein beruhen Unentscheidbarkeitsbeweise, die sich auf die Formalisierung von Turing-Maschinen beziehen, auf der Konstruktion einer Formel $(In(\mathcal{M}) \wedge Des(\mathcal{M})) \rightarrow \Delta$, wobei Δ für eine Formel steht, deren Interpretation besagt, dass $\mathcal{M}$ zu irgendeinem Zeitpunkt eine bestimmte Konfiguration besitzt. In modernen Varianten von Turings Beweis ist dies eine Formel Δ, deren Interpretation besagt, dass $\mathcal{M}$ in einen Zustand gerät, in dem sie hält. In Turings Beweis ist dies zumeist eine Formel, deren Interpretation besagt, dass $\mathcal{M}$ zu irgendeinem Zeitpunkt in eine Konfiguration gerät, in der auf ihrem Band ein bestimmtes Zeichen – bei Turing eine 0 – erscheint. Turing kürzt die entsprechenden Formel $(In(\mathcal{M}) \wedge Des(\mathcal{M})) \rightarrow \Delta$ mit $Un(\mathcal{M})$ ab.

Der entscheidende Schritt in Turings Unentscheidbarkeitsbeweis besteht in dem Beweis des folgenden Lemmas:

Lemma: $Un(\mathcal{M})$ ist beweisbar gdw. $\mathcal{M}$ zu irgendeinem Zeitpunkt in eine Konfiguration gerät, in der auf ihrem Band eine 0 erscheint.

Turing teilt dieses Lemma in zwei Lemmata 1 und 2 auf, die jeweils eine Richtung der Äquivalenzaussage beweisen. Meine Kritik bezieht sich auf den Beweis von LEMMA 2, das die Richtung von links nach rechts betrifft. Hierauf werde ich zurückkommen.

Turings Unentscheidbarkeitsbeweis von FOL beruht auf seinem Beweis, dass es keine universale Turing-Maschine geben kann, die für eine *beliebige* Turing-Maschine (inklusive ihrer selbst) entscheiden kann, ob sie jemals eine 0 druckt. Meine Kritik betrifft weder diesen Beweis noch den Beweis anderer Theoreme, auf denen alternative Unentscheidbarkeitsbeweise beruhen, wie z.B. die Unlösbarkeit des Halte-Problems. Nach dem Verständnis einer algorithmischen Mathematik handelt es sich bei derartigen unlösbaren Problemen – anders als bei dem Problem der Entscheidbarkeit der Beweisbarkeit logischer Formeln – nicht um wohldefinierte Probleme. Dies kann an dieser Stelle jedoch dahingestellt sein.

Unter der Voraussetzung, dass es keine Turing-Maschine geben kann, die für eine beliebige Turing-Maschine entscheidet, ob sie jemals eine 0 druckt, sowie unter Voraussetzung seines Lemmas, kann Turing schließen, dass FOL unentscheidbar ist, denn wäre FOL entscheidbar, dann könnte unter Anwendung des Lemmas aus der Entscheidung über die Beweisbarkeit von $Un(\mathcal{M})$ darauf geschlossen werden, ob $\mathcal{M}$ zu irgendeinem Zeitpunkt in eine Konfiguration gerät, in der auf dem Band von $\mathcal{M}$ eine 0 steht. Dies ist ein indirekter Beweis, der die hypothetische Annahme einer Turing-Maschine, die FOL entscheidet, ad absurdum führen soll. Dieser Beweis ist völlig unabhängig von konkreten Überlegungen zu einer automatisierten Beweissuche.

Meine Kritik an Turings Unentscheidbarkeitsbeweis beschänkt sich auf sein Lemma 2. Dessen Beweis sei vollständig zitiert. Er ist erstaunlich kurz und erscheint trivial; auch die Beweise moderner Varianten sind nicht wesentlich anders. In dem folgenden Zitat gebraucht Turing S_1 als Zeichen für die 0. Turing (1936, 277):

> Lemma 2. *If $Un(M)$ is provable, then S_1 [i.e. 0] appears on the tape in some complete configuration of M.*
>
> If we substitute any propositional functions for function variables in a provable formula, we obtain a true proposition. In particular, if we substitute the meanings tabulated on pp. 259-260 in $Un(M)$, we obtain a true proposition with the meaning "S_1 appears somewhere on the tape in some complete configuration of M".

Ersetzt man in einer logischen Formel die Variablen propositionaler Funktionen gemäß einer vorgegebenen intendierten Interpretation durch propositionale Funktionen, nenne ich den resultierenden Satz eine "Instanz" der logischen Formel. Turings Beweis beruht auf folgendem allgemeinen Prinzip (vgl. den ersten Satz seines Beweises):

Turings Prinzip: Die Instanz einer beweisbaren logischen Formel ist ein wahrer Satz.

Dieses Prinzip wendet Turing im zweiten Satz seines Beweis an. Er setzt dabei voraus, dass für eine gegebene Turing-Maschine $\mathcal{M}$ das Antecedenz dieser Formel gemäß der intendierten Interpretation wahr ist (= *Turings Annahme*). Folglich ist die intendierte Interpretation von $Un(\mathcal{M})$ genau dann wahr, wenn die intendierte Interpretation des Konsequenz Δ von $Un(\mathcal{M})$ wahr ist, d.i. $\mathcal{M}$ tatsächlich in eine Konfiguration gerät, in der auf ihrem Band eine 0 erscheint.

Der Fehler in Turings Beweis besteht darin, dass sein Prinzip nicht gilt und auch seine konkrete Anwendung im Beweis von LEMMA 2 fragwürdig ist.

Dass das Prinzip nicht gilt, machen zahlreiche Beispiele aus der Philosophie der Logik deutlich, die z.B. intensionale oder metasprachliche Kontexte sowie mehrdeutige oder vage Sätze betreffen. Ich führe hier nur 3 Beispiele an:

FOL-**Formel**	**Intendierte Interpretation**
$\vdash (Fa \wedge a = b) \rightarrow Fb$	$I(a)$ = Iokaste $I(b)$ = Ödipus Mutter $I(F)$ = Ödipus glaubt, dass er x heiratet. Oder $I(a)$ = Giorgione $I(b)$ = Barbelli $I(F)$ = x heißt so wegen seiner Größe.
$\vdash Fab \rightarrow \exists x Fax$	$I(a)$ = Hans $I(b)$ = Pegasus $I(F)$ = x sucht y
$\vdash P \vee \neg P$	$I(P)$ = Hans hat eine Glatze. Oder $I(P)$ = Dieses Disjunkt besteht aus sieben Worten.

Alle diese Beispiele verletzten das Extensionalitätsprinzip. Dieses Prinzip besagt, dass eine jede Interpretation von Namenbuchstaben in einer logischen Formel eindeutig einen Gegenstand, eine jede Interpretation von Prädikatbuchstaben (= Variablen propositionaler Funktionen) eindeutig eine Menge und eine jede Interpretation einer logischen Formel eindeutig einen Wahrheitswert bezeichnen muss. Nur unter dieser Voraussetzung gelten die Gesetze von FOL und es kann von der Beweisbarkeit einer Formel auf die Wahrheit ihrer Instanz geschlossen werden. Interpretationen hingegen, die das Extensionalitätsprinzip verletzen, sind unzulässig.

Das allgemeine Problem der Anwendung von Turings Prinzip besteht darin, dass kein von Turings Prinzip unabhängiges Kriterium zur Verfügung steht, nach dem entschieden werden könnte, ob bestimmte intendierte Interpretationen zulässig sind. Die Diskussion hierüber ist vor philosophischen Abgründen nicht gefeit und sollte mathematische Beweise nicht belasten. Es reicht nämlich nicht, dass es auf Grund der sprachlichen Form so scheint, als würde auf Gegenstände, Mengen oder Wahrheitswerte Bezug genommen. Der Schein kann trügen. Dies soll zunächst kurz an der Diskussion um Paradoxien veranschaulicht werden, bevor diese Diskussion dann auf Turings Beweis übertragen wird.

Paradoxien wie das Lügner-Paradox, Cantors Paradox, Russells Paradox oder Richards Paradox enthalten propositionale Funktionen, die selbstbezügliche Aussagen zulassen: "x ist nicht wahr" (Lügner), "x ist ein Menge" (Cantor), "x ist eine Menge, die sich nicht selbst als Element enthält" (Russell), "x ist eine Zahl, die nicht Element der Menge ist, die durch die $x$te Definition einer Aufzählung aller Definitionen von Zahlmengen definiert ist" (Richard). In Frage steht, ob derartige propositionale Funktionen wohldefinierte Mengen bezeichnen. Lässt man selbstbezügliche Aussagen zu, ist dies zu verneinen: "Dieser Satz ist nicht wahr" hat keinen wohldefinierten Wahrheitswert. Er erfüllt das Bivalenzprinzip und damit das Extensionalitätsprinzip nicht. Eine Interpretation von Fa mit

$I(F) = x$ ist nicht wahr,

$I(a) =$ dieser Satz

ist nicht zulässig und würde z.B. im Fall von $\vdash Fa \leftrightarrow Fa$ Turings Prinzip verletzten. Man kann dies dadurch erklären, dass in selbstbezüglichen Aussagen der Ausdruck an der Argumentstelle propositionaler Funktionen nicht eindeutig referiert: Substituiert man z.B. für "dieser Satz" in "dieser Satz ist nicht wahr" (= Satz 1) eben diesen Satz 1, dann erhält man "'dieser Satz ist nicht wahr' ist nicht wahr" (Satz 2): Der Ausdruck "dieser Satz" in Satz 1 und in Satz 2 ist zwar identisch, aber referiert nicht auf denselben Satz. Entscheidend ist hier jedoch nicht die konkrete Analyse der Paradoxien, sondern nur die Tatsache, dass sie auf Grund der Selbstbezüglichkeit unzulässige Interpretationen logischer Formeln darstellen.

Turing erwähnt weder in seinem Beweis noch an irgendeiner Stelle seines Papers, dass auch seine intendierten Interpretationen zu selbstbezüglichen Interpretationen führen können. Das Tückische an seinem Beweis ist, dass man zunächst nur an "normale Fälle" denkt, in denen sein Lemma keine Probleme bereitet. In diesen Normalfällen werden Formalisierungen von Turing-Maschinen betrachtet, die nicht logische Formeln entscheiden. In diesen Fällen spricht nichts dagegen, die Entscheidung über die Beweisbarkeit von $Un(\mathcal{M})$ als Kriterium dafür zu verwenden, dass die Ausführung der Befehle einer formalisierten Turing-Maschine irgendwann zu einer bestimmten Konfiguration führt. Der Unmöglichkeitsbeweis für eine universelle Turing-Maschine, die entscheidet, ob eine gegebene Turing-Maschine in eine bestimmte Konfiguration gerät, beruht aber nicht auf derartigen Fällen, sondern auf der Unmöglichkeit, dass eine universelle Turing-Maschine auch über Turing-Maschinen befinden müsste, die eben diese universelle Turing-Maschine enthalten. In Frage steht nicht, ob in einigen, sondern ob in *allen* Fällen entschieden werden kann, ob eine Turing-Maschine in eine bestimmte Konfiguration gerät. Dies wird mit Bezug auf Selbstbezüglichkeit (zu Recht) geleugnet; eine derartige Entscheidung in allen Fällen treffen zu können, ist undenkbar.

Um zu prüfen, inwieweit mit einer Turing-Maschine, die logische Formeln entscheidet, – nennen wir sie "FOL" –, eine derartige, (undenkbare) universelle Turing-Maschine gegeben sei, muss auch im Unentscheidbarkeitsbeweis der hypothetische Fall betrachtet werden, in dem FOL mit ihrer eigenen Formalisierung startet. Um uns einen derartigen Fall deutlich vor Augen zu führen, betrachten wir der Einfachheit halber das Halteproblem und machen von einem bekannten Trick Gebrauch, indem wir uns die Komposition der hypothetischen Turing-Maschine FOL mit der sogenannten "Dithering-Maschine" D vorstellen (vgl. Boolos et al. (2003, 39)). Auf den Input 1 "zittert" (= bewegt sich endlos zwischen 2 Quadraten) die Turing-Maschine D, sonst hält sie. Die Turing-Maschine D existiert nachweislich (ihr Code ist $1, 3, 4, 2, 3, 1, 3, 3$ – eine der ersten Turing-Maschinen in der Aufzählung aller Turing-Maschinen). Wir nehmen an, dass FOL 1 ausgibt, wenn ihr Input eine beweisbare Formel ist und 2 sonst. Des Weiteren übertragen wir Turings Lemma 2 auf das Halteproblem: Die intendierte Interpretation von Δ bezieht sich folglich auf eine Konfiguration, in dem die formalisierte Turing-Maschine $\mathcal{M}$ hält. Die entsprechende Formalisierung sowie der zu Turings Beweis analoge Beweis finden sich beide in Boolos et al. (2003, 130).

Wenn nun $FOLD$ mit ihrer eigenen Formalisierung $Un(FOLD)$ startet und FOL entscheidet, dass $Un(FOLD)$ beweisbar ist und folglich den Wert 1 an D übergibt, dann folgt unter Anwendung von Lemma 2, dass $FOLD$ hält, aber auf Grund der Definition von D, kann $FOLD$ nicht halten, da D mit dem Input 1 gestartet wird und in diesem Fall nicht hält. Es liegt folglich ein Widerspruch vor. Die Frage ist, welche Annahme auf Grund des Widerspruches ad absurdum zu führen ist.

Turing zieht in diesem Fall unter Voraussetzung seines Lemmas den Schluss, dass FOL nicht existieren kann. Dieser Schluss ist jedoch weder zwingend noch liegt er nahe. Es lässt sich stattdessen argumentieren, dass Lemma 2 für diesen Fall nicht gilt: Die intendierte Interpretation ist in diesem Fall nicht zulässig. Man muss sich hierfür genau vor Augen führen, worin die intendierte Interpretation von $Un(FOLD)$ besteht. $Un(FOLD)$ hat die Form $(In(FOLD) \wedge Des(FOLD)) \rightarrow \Delta$. Das Problem ist die intendierte Interpretation des Bestandteiles $In(FOLD)$ dieser Formel. Sie soll in diesem Fall die Formel $(In(FOLD) \wedge Des(FOLD)) \rightarrow \Delta$, die in dem betrachteten Fall die Anfangskonfiguration von $FOLD$ ausmacht und von der $In(FOLD)$ selbst ein Teil ist, beschreiben. Hier lässt sich ganz analog zu den Paradoxien argumentieren: Solche Interpretationen sind nicht zulässig. Sie erfüllen nicht das Extensionalitätsprinzip. *Turings Annahme*, siehe oben S. 11, dass die intendierte Interpretation des Antecedenz $In(M) \wedge Des(M)$ wahr ist, scheitert in diesem Fall daran, dass die intendierte Interpretation von $In(M)$ keinen wohldefinierten Wahrheitswert hat. Folglich kann Turings Prinzip nicht angewendet werden.

Man kann sich die Unmöglichkeit einer eindeutigen Interpretation in diesem Fall ganz konkret vor Augen führen. Wenn die logische Formel $(In(FOLD) \wedge Des(FOLD)) \rightarrow \Delta$ die Anfangskonfiguration von $FOLD$ ist, dann können wir zum einen Turings Formalisierungsverfahren anwenden, um $In(FOLD)$ zu konstruieren. Nach diesem Formalisierungsverfahren ist eine Formel, deren Interpretation eine Anfangskonfiguration beschreiben soll, stets länger als die zu beschreibende Konfiguration, denn allein für den Formelbestandteil, dessen Interpretation besagt, dass sich ein bestimmtes Zeichen auf einem bestimmten Quadrat befindet, werden mehr Zeichen benötigt. Folglich würde die Anwendung von Turings Formalisierungsverfahren in diesem Fall zu einer Formel $In(\mathcal{M})$ führen, die länger als $(In(FOLD) \wedge Des(FOLD)) \rightarrow \Delta$ ist. Andererseits soll aber $In(FOLD)$ Bestandteil von $(In(FOLD) \wedge Des(FOLD)) \rightarrow \Delta$ und damit kürzer als diese Formel sein. Derselbe Widerspruch ergibt sich auch, wenn man statt konkreter logischer Formeln ihren Maschinencode betrachtet. Der Widerspruch hat nichts damit zu tun, ob FOL existiert oder nicht, sondern mit der Unmöglichkeit einer eindeutigen Identifikation dessen, was genau wie zu interpretieren ist.

Das Mindeste, was man erwartet, wenn ein Beweis auf selbstbezüglichen Interpretationen beruht, ist eine Argumentation dafür, warum die selbstbezüglichen Aussagen in diesem Falle das Extensionaliätsprinzip erfüllen. Eine solche Argumentation findet sich weder in Turings Paper noch in modernen Varianten seines Beweises. Weder wird erkannt, dass Turings Prinzip nicht allgemeingültig ist, noch wird erkannt, dass die spezifische Anwendung des Prinzips in Unentscheidbarkeitsbeweisen problematisch ist, da sie im fraglichen Fall, dass eine Turing-Maschine mit ihrer eigenen Formalisierung gestartet wird, impliziert, dass ein Bestandteil A einer Formel B so interpretiert werden soll, dass er die Formel B, deren Bestandteil A ist, beschreibt, und zugleich diese Formel B eine Anfangskonfiguration darstellt, deren Formalisierung gemäß des von Turing angegebenen Formalisierungsverfahrens nicht Bestandteil von B sein kann.

Das Hauptproblem der Anwendung der logisch-axiomatischen Methode in Unentscheidbarkeitsbeweisen besteht darin, dass derartige Beweise Probleme der Zulässigkeit von Interpretationen hervorrufen. Aus der Perspektive einer Grundlegung einer algorithmischen Mathematik können Beweise nicht beweiskräftig sein, die mit derartigen Problemen belastet sind. Es macht folglich auch keinen Sinn die Grenzen der Algorithmisierbarkeit der Prädikatenlogik 1. Stufe nachweisen zu wollen, indem man Beweismittel verwendet, die voraussetzungsreicher und fragwürdiger sind, als die rein formalen Beweise, deren Algorithmisierung in Frage steht. Ein algorithmischer Ansatz misstraut dem hypothetischen Charakter der metamathematischen Beweisführung: Anstatt die konkrete Suche nach Beweisen zu automatisieren, werden Entscheidungsverfahren lediglich hypothetisch angenommen, um ihre Existenz unter Voraussetzung zweifelhafter allgemeiner Annahmen bezüglich des Verhältnis von der Beweisbarkeit von Formeln und der Wahrheit ihrer Instanzen ad absurdum zu führen. Hierzu schreibt Wittgenstein zu Recht, dass derartige Widerspruchsbeweise keinen "triftigen Grund" dafür darstellen, die Suche nach Entscheidungsverfahren einzustellen, da diese nicht die Annahme eines Entscheidungsverfahrens, sondern die in diesen Beweisen implizierten "Deutungen" (intendierten Interpretationen) in Frage stellen (vgl. Wittgenstein (1991b, Anhang 3, §§8,10,13)).

Wittgenstein meinte, das Entscheidungsproblem sei ein "logisch-mathematisches" Problem, "wie jedes andere" (Wittgenstein (1984b, §125)) und fühlte sich als Philosoph nicht berufen, es zu lösen. Es mag sein, dass die Lösung des Entscheidungsproblem keine philosophische Aufgabe ist, – aber es ist in jeder Hinsicht eine wichtige, und wenn man nicht von Turings Beweis überzeugt ist, sollte man die Kritik am besten dadurch untermauern, dass man das Church-Turing Theorem konkret widerlegt. Um nachzuweisen, dass ein hypothetisches Räsonieren kein geeigneter Maßstab ist, um über die Grenzen der Algorithmisierbarkeit zu befinden, und dass die logisch-axiomatische Methode vor paradoxen Anwendungen nicht gefeit ist, habe ich ein Entscheidungsverfahren für FOL ausgearbeitet und in einem Programm FOL-Decider implementiert, s. auch Fußnote 6. Dieses ist unabhängig von jeglicher Interpretation logischer Formeln. Es besteht in nichts anderem als einer Algorithmisierung bekannter logischer Äquivalenzumformungsregeln. Ist eine Formel beweisbar, gibt das Programm einen Beweis aus. Ist eine Formel nicht beweisbar, so wird dies anhand rein syntaktischer Kriterien entschieden. Die automatisierte Beweissuche dient hierbei allein dem Zweck, mittels äquivalenter Umformungen die entsprechenden Kriterien anwenden zu können. Gemäß eines algorithmischen Ansatzes in Grundlagenfragen der Mathematik können und sollten nur derartige konkrete Vorschläge von Entscheidungsverfahren für wohldefinierte mathematische oder logische Probleme darüber befinden, was in der Mathematik / Logik möglich bzw. unmöglich ist.

5 Algorithmisches Beweisverständnis

Die Ausführungen des vorangegangenen Abschnittes sollten zeigen, dass Schritt 1 der logisch-axiomatische Methode – die logische Formalisierung mathematischer und metamathematischer Probleme, Funktionen und Sätze unter Annahme intendierten Interpretationen logischer Ausdrücke – defizitär ist. Es lassen sich weitere mathematische, heuristische, pragmatische, philosophische, ästhetische und pädagogische Vorbehalte gegen eine einseitige Grundlegung der Mathematik durch die mathematische Logik anführen.

Die logisch-axiomatische Methode hat mit der mathematischen Praxis wenig zu tun. Hierzu nur ein Beispiel: Man kann Goldbachs Vermutung mit Standardtechniken der mathematischen Logik in eine komplexe logische Formel übersetzen, deren Beweisbarkeit äquivalent mit der Wahrheit der Negation von Goldbachs Vermutung ist. Die Entscheidung über Goldbachs Vermutung ist damit auf eine logische Standardfrage reduziert: Ist eine bestimmte Formel beweisbar? Goldbachs Vermutung auf diese Weise anzugehen, erfordert kein mathematisches Wissen, sondern nicht mehr als Standardwissen mathematischer Logik. Trotzdem wird auf diese Weise Goldbachs Vermutung in der Praxis nicht angegangen: Es widerspricht jeder mathematischen Intuition und trägt jedenfalls nichts zu unserem Verständnis bei, gerade Zahlen als Summe zweier Primzahlen darzustellen. Des Weiteren ist die resultierende logische Formel enorm komplex, so dass höchstens ein maschinengeführter Beweis zu einem Ergebnis gelangte. Dieser würde bestenfalls dazu führen, dass wir im Falle der Bestätigung der Goldbachschen Vermutung dem trauen, was Berechnungen für viele Einzelfälle auch nahelegen. Zu einem besseren Verständnis, warum die Vermutung gilt, würde so ein Beweis kaum führen. Man vergleiche dies mit einem etwaigen Beweis der Goldbachschen Vermutung, der eine allgemeine Formel angeben würde, nach der für eine beliebige gerade Zahl x zwei Primzahlen konstruiert werden können, deren Summe x ergibt. Im negativen Falle der Widerlegung von Goldbachs Vermutung mittels der logisch-axiomatischen Methode wird man kaum mehr wissen als man unabhängig von ihr in diesem Fall wissen könnte, denn die logisch-axiomatische Methode stellt keine spezifische Mittel bereit, ein konkretes Gegenbeispiel zu finden. Wie immer ein Beweis ausfiele, es wäre auch immer denkbar, dass man auf Grund der Komplexität der Beweissuche an der konkreten Beweisführung zweifelt.

Von philosophischer Seite bleibt unbefriedigend, dass die logisch-axiomatische Methode alles andere als eine begriffliche Analyse mit Explikationsanspruch ist: Sie hängt vielmehr von nicht weiter begründeten Axiomen ab und ist rein extensional. Der Bezug auf Axiome ist unbefriedigend, da mathematische Probleme nicht die Form haben: "Folgt dieser Satz logisch aus jenen Sätzen?", sondern gefragt wird etwa nach einer Regel, nach einer Zahl oder, wenn die Wahrheit eines Satzes in Frage steht, dann danach, ob dieser Satz sich mathematisch – und damit unter Voraussetzung spezifisch mathematischer Definitionen und Regeln – herleiten lässt. Die Rekonstruktion mathematischer Beweise im Sinne logischer Beweise aus Axiomen ist alles andere als selbstverständlich; sie entspricht dem Bild der axiomatischen, nicht der algorithmischen Mathematik. Die Extensionalität der logisch-axiomatischen Methode ist unbefriedigend, da allein die *Wahrheit* von Sätzen (nicht notwendigerweise ihr spezifischer *Sinn*) mit der Wahrheit von intendierten Interpretationen von Formeln oder ihrer Beweisbarkeit korreliert wird. Ein Verständnis mathematischer Begriffe wird darüber nicht gewonnen. Man denke etwa an die logizistische Definition der 0 als Menge all der Mengen, die gleich viele Elemente wie die Menge der Gegenstände, die unter den Begriff $x \neq x$ fallen; oder an die Definition von Relationen durch Klassen geordneter Paare (vgl. hierzu Quine (1960, §53) "Das geordnete Paar als philosophisches Paradigma"); oder auch an die Definition logischer Wahrheit durch Allgemeingültigkeit (vgl. hierzu schon Wittgenstein (1984a, §6.1231) und im Einzelnen Etchemendy (1990), der die mangelnde Explikationskraft einer solchen Definition darlegt).

Die logisch-axiomatische Methode führt auch nicht zu schönen Beweisen, insofern man die Schönheit von Beweisen an der Transparenz, Explikationskraft oder der Ausdrucksstärke der äußeren Form misst. Angewiesenheit auf Interpretation und Axiome sind das Gegenteil von diesem ästhetischen Ideal. Ein Beweisverständnis, dessen Ziel es ist, logische oder mathematische Eigenschaften mittels Äquivalenzumformung anhand der äußeren Form von Ausdrücken einer passender Notation zu identifizieren, erfüllt hingegen die genannten Kriterien. Es zielt mit den Beweisen darauf, dass auch verstanden wird, *warum* das Bewiesene gilt (und nicht nur, dass es unter bestimmten Annahmen gilt).

Der mit der logisch-axiomatischen Methode einhergehende Mangel an Explikation mathematischer Begriffe und Intuitionen sowie die Komplexität und Intransparenz der resultierenden logischen Formalisierungen kann auch erklären, warum die logisch-mathematische Methode für die Mathematik mehr pädagogischen Schaden als Nutzen anrichten kann. Nicht von ungefähr hat sich das Projekt, Mengenlehre in der Schule einzuführen, als wenig fruchtbar erwiesen und mathematische Logik spielt in der Schule gar keine und in der akademischen Ausbildung kaum eine Rolle. Sie ist eine Randdisziplin, auf die verwiesen wird, wenn man versichern will, dass auch die Grundlagen der Mathematik mathematisch präzise definiert sind, ohne dass man von dieser Disziplin noch wesentlich neue oder innovative Ergebnisse erwartet. Der Gebrauch logischer und mengentheoretischer Terminologie in der Mathematik hat wenig mit einer stringenten Anwendung der logisch-axiomatischen Methode zu tun. Oftmals erfüllt er im positiven Fall den Zweck, mathematische Redeweise zu standardisieren und abzukürzen, im negativen Fall ist er kaum mehr als ein Jargon, der mathematische Beweise mit unnötig prätentiöser Prosa versieht.[3]

Steht man der logisch-axiomatischen Methode skeptisch gegenüber, stellt sich die Frage, was für ein Beweisverständnis an ihre Stelle treten soll. Ich werde im Folgenden ein "algorithmisches Beweisverständnis" skizzieren, das dem logisch-axiomatischen diametral entgegengesetzt ist. Dies geschieht aus der Überzeugung, dass es für Grundlagenfragen der Mathematik fruchtbarer ist, den Gegensatz einer "axiomatischen" und einer "algorithmischen" Mathematik zu profilieren als ihn zu nivellieren. Ich betrachte das Unternehmen einer rein algorithmischen Mathematik als Selbstzweck: Mir erscheint eine Mathematik "innerhalb der Grenzen der Entscheidbarkeit" den "Kern der Mathematik" auszumachen, an dem sich eine Grundlegung zunächst orientieren sollte. Bevor man eine derartige Mathematik als zu beschränkt abtut, sollte man untersuchen, wie weit man mit ihr kommt. Immerhin kann man m.E. zeigen, dass sich sog. Unentscheidbarkeitstheoreme konkret widerlegen

[3] Vgl. Wittgenstein (1991b, S. 299):

> Dies ist der Fluch des Einbruchs der mathematischen Logik in die Mathematik, dass nun jeder Satz sich in mathematischer Schreibung darstellen lässt, und wir uns daher verpflichtet fühlen, ihn zu verstehen. Obwohl ja diese Schreibweise nur die Übersetzung der vagen gewöhnlichen Prosa ist.

lassen, indem man FOL unter rein algorithmischem Gesichtspunkt betreibt, anstatt über die Grenzen ihrer Algorithmisierung zu räsonieren, indem man die Interpretation und damit die Anwendung der Logik zum Maßstab über das Befinden der Grenzen der formalen Logik erhebt. Eine "einseitige" Gewichtung des "algorithmischen Gesichts der Mathematik" soll damit aber keineswegs zur Norm erhoben werden, – als Wissenschaftsphilosoph kommt es mir vielmehr darauf an, einer einseitigen oder unreflektiert betriebenen Normalwissenschaft durch die Ausarbeitung wohldefinierter alternativer Paradigmen entgegen zu wirken.

Algorithmisches Beweisverständnis: Ein Beweis besteht in einer mechanischen Äquivalenzumformung eines Ausdruckes ϕ in einen (idealen) Ausdruck ϕ', dessen äußere Eigenschaften es ermöglichen, eine in Frage stehende logische oder mathematische Eigenschaft zu entscheiden.

Ein Beweis beruht demnach auf Äquivalenzumformung innerhalb eines Kalküls; – er beruht weder auf logischer Formalisierung noch auf Interpretationen. Er startet nicht mit Axiomen, sondern mit Ausdrücken, deren Eigenschaften in Frage stehen. Er endet nicht mit Theoremen, sondern mit Ausdrücken, die erlauben, ein mathematisches Problem zu lösen bzw. zu entscheiden, indem sie ein Kriterium bereitstellen, durch das sich eine in Frage stehende Eigenschaft identifizieren lässt. Beweise beruhen auf Entscheidungsverfahren, die prinzipiell durch einen Computer ausgeführt werden können. Die hierbei vorgenommenen Umformungen sind hinsichtlich der in Frage stehenden Eigenschaft äquivalent.

Da der Prozess des Beweisens eine Äuivalenzumformung ist und sich die Relata ϕ und ϕ' dadurch unterscheiden, dass ϕ' im Gegensatz zu ϕ ein syntaktisches Kriterium für eine in Frage stehende formale Eigenschaft bereitstellt, kann der Beweis ganz anders als in dem logisch-axiomatischen Verständnis als eine begriffliche Analyse mit Explikationskraft verstanden werden: Die Analyse mathematischer und logischer Begriffe ist nach diesem Verständnis eine "algorithmische Analyse". Im Gegensatz zu einer mengentheoretischen Modellierung logischer oder mathematischer Begriffe ist eine so verstandene algorithmische Analyse ein Paradigma exakter und philosophisch befriedigender Begriffsanalyse. Wenn man wissen will, was z.B. eine "logisch wahre Formel" ist, dann definiere man ein mechanisches Äquivalenzumformungsverfahren, das erlaubt, sämtliche logischen Formeln als logisch wahr oder nicht logisch wahr anhand der resultierenden Ausdrücke zu identifizieren. Die algorithmetische Definition ist vereinbar mit nicht-algorithmischen Definitionen wie der durch "Allgemeingültigkeit" (Wahrheit in allen Interpretationen) oder durch "logische Notwendigkeit"; will aber die "prä-algorithmischen", extensionalen (Allgemeingültigkeit) oder intensionalen (logische Notwendigkeit) Definitionen durch eindeutige Definition mit höherer Explikationskraft ersetzen.

Es wird nach diesem Verständnis nicht davon ausgegangen, dass mathematische Begriffe bereits einen wohldefinierten Sinn und eine eindeutige Bedeutung haben und nur noch die Wahrheit oder Falschheit von Sätzen zu entscheiden ist. Vielmehr gibt erst die Algorithmisierung mathematischen Begriffen ihren präzisen Sinn, wo unabhängig davon nur eine vage Bedeutung oder bloß informell definierbarer Sinn vorliegt. Wir können z.B. einzelne Fälle der Zerlegung von geraden Zahlen in die Summe zweier Primzahlen vorlegen und wir können die Begriffe "Primzahl", "gerade Zahl", "Summe" mittels Wortsprache oder auch mittels primitiv rekursiver Funktionen definieren. Aber verstanden haben wir den mathematischen Gehalt von Goldbachs Vermutung erst, wenn wir einen allgemeinen Algorithmus der Zerlegung gerader Zahlen in Summen von Primzahlen angegeben können. Goldbachs Vermutung besitzt nach diesem Verständnis noch keinen präzisen mathematischen Sinn unabhängig von ihrer algorithmischen Lösung. Auch eine logische Formalisierung der Vermutung ändert hieran nichts, denn sie ist nach diesem Verständnis nicht der 1. Schritt in einer (logisch-axiomatischen) Beweisführung, sondern bestenfalls die Präzisierung der "vagen gewöhnlichen Prosa" (vgl Fußnote 3). Mathematische und logische Probleme bestehen wesentlich darin, dass unsere gewöhnliche Ausdrucksweise – sei sie informell, semiformal oder auch in Form einer konventionellen mathematischen Notation – eine in Frage stehende mathematische Eigenschaft nicht identifizieren lässt. Statt zu meinen, dass wir mathematische Probleme oder Sätze verstehen und wir nur nicht ihre Lösung oder ihren Wahrheitswert kennen, sollten wir erkennen, dass ungelösten Problemen ein Mangel an mathematischem Verständnis anhaftet, das es zu überwinden gilt. Das bessere Verständnis mathematischer Begriffe durch Erfinden von Algorithmen zum Zwecke der Lösung mathematischer Probleme ist die eigentliche Herausforderung, die es zu bewältigen gilt, nicht das logische Ableiten von Theoremen aus Axiomen zum Zwecke der Einsicht in ihre Wahrheit, unabhängig davon, ob der Sinn der bewiesenen Theoreme auf algorithmischen Wege expliziert werden kann.

Nach dem logisch-axiomatischen Beweisverständnis gibt es keinen wesentlichen Unterschied zwischen formaler Wissenschaft (Logik, Mathematik) und Erfahrungswissenschaft. Die Beweise sind von gleicher Art, nur die Axiome und Theoreme unterscheiden sich, da der untersuchte Gegenstandsbereich ein anderer ist. Die mathematische Ausdrucksweise sowie Umformungen zwischen Symbolen unterschiedlicher Notationen spielen nach diesem Verständnis keine wesentliche Rolle; – wesentlich ist allein, wofür diese stehen. Demgegenüber haben nach einem algorithmischen Verständnis der Mathematik mathematische Symbole gar keine referierende Bedeutung und ihr mathematischer Sinn erschöpft sich in den Regeln ihrer symbolischen Manipulation zum Zwecke der Identifikation formaler Eigenschaften. Ganz anders als Erfahrungswissenschaft geht es in der Mathematik um nichts anderes als die Identifikation formaler Eigenschaften: Zahlen, geometrische Objekte, Satzvariablen sind Formen, ihre Eigenschaften und Relationen formale Eigenschaften und Relationen. Die mathematischen Problemen entstehen dadurch, dass diese Formen in konventionellen Notationen nicht eindeutig identifiziert werden können. Formen sind das, was allen äquivalenten Ausdrücken gemeinsam ist. Formen werden nicht mittels Zeichen bezeichnet, auf sie kann nicht referiert werden; es bedarf keiner Interpretationen von Zeichen im Sinne ihrer Zuordnung zu etwaigen Extensionen in der Mathematik. Logische oder mathematische Formen lassen sich vielmehr nur mittels Umformung eindeutig identifizieren, so dass sie an der äußeren Form der resultierenden Symbole eindeutig abgelesen werden können. Eine algorithmische Grundlegung der Mathematik versucht dem philosophischen Bestreben, Mathematik als eine rein begriffliche, analytische "Wissenschaft des A priori" zu verstehen, gerecht zu werden, indem sie ihre Besonderheit in der Entwicklung von Algorithmen sieht, die nichts anderes machen als Symbole zweckmäßig zu manipulieren. In der Mathematik kommt es gerade darauf an, *wie* etwas ausgedrückt oder dargestellt wird, selbst dann, wenn gar nichts ausgesagt wird. Dies ist auch ein Grund, warum algorithmische Beweise im Sinne des Aufzeigens syntaktischer Kriterien durch systematische, kleinschrittige und zielgerichtete Manipulation schön und pädagogisch wertvoll sein können.

Die Logik ist nach diesem Verständnis nur eine formale Wissenschaft, die Satzformen betrifft. Man kann sie als formale Wissenschaft der Mathematik zurechnen, allerdings sind ihre Formen nicht – wie etwa die der Geometrie – intern mit Zahlen und Formen wie sie in Arithmetik, Algebra oder Analysis untersucht werden, verbunden. Sie kann mengentheoretisch interpretiert und / oder auf eine formale Analyse der Umgangssprache angewendet werden, aber diese Interpretation und Analyse ist nach einem algorithmischen Verständnis der Mathematik nicht auf die Analyse genuin mathematischer Sätze übertragbar. Der mengentheoretische Begriff der Funktion ist für eine algorithmisch Mathematik entbehrlich; an ihre Stelle tritt der Begriff der *Operation* im Sinne einer iterativ anwendbaren Regel, die die Form von

Ausdrücken verändert.[4] Operationen *konstruieren* Formen, die in internen Zusammenhängen stehen und ein System bilden, sie definieren keine Mengen zusammenhangloser Gegenstände. Logische Konstanten (z.B. Konjunktion, Disjunktion, Implikation, Quantoren) werden ebenso wie zahlentheoretische "Funktionen" (z.B. Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Potenzieren, Wurzelziehen, Logarithmus, Ableiten, Integrieren) als Operationen verstanden, die keiner mengentheoretischen Begründung bedürfen. Jedes neue primitive Symbol erfordert neue Rechenregeln, durch die es in ein *System* bestehender Rechenregeln eingefügt wird und durch die neue Formen konstituiert werden, deren Untersuchung ihrer internen Eigenschaften und Relationen erweiterte oder neue Kalküle erfordert.

Mathematische und logische Formen sowie mathematische und logische Kalküle sind dabei nicht aufeinander reduzierbar. Unterschiedliche Formen erfordern unterschiedliche Notationen, Kalküle und Algorithmen. Eine algorithmische Analyse strebt nicht nach einer universellen Ausdrucksweise oder einem universellen Kalkül, sondern danach, die jeweils spezifischen Probleme mit einem spezifischen Symbolismus im Rahmen spezieller Kalküle zu entscheiden. Es gibt für die Lösung noch ungelöster mathematischer Probleme kein Patentrezept, keine vorab definierte Methode, die nur wegen der Unentscheidbarkeit der Logik noch Raum für mathematische Kreativität lassen könnte.[5] Die Entscheidbarkeit von FOL ist – anders als von Neumann, vgl. Fußnote 5, meint – kein Gespenst, das die mathematische Arbeit an der Lösung genuin mathematischer Problemen überflüssig macht, da das Lösen mathematischer Probleme genuin mathematischer Algorithmen bedarf und diese zu finden, die Mathematik immer wieder vor neue Herausforderungen stellt. Die Methode der algorithmischen Mathematik ist nicht logisch-axiomatisch und damit deduktiv und universell, sondern sie ist induktiv:

[4] Die Gegenüberstellung von Funktion und Operation ist ein Kern von Wittgensteins Philosophie der Mathematik. Die Logik beruht nach diesem Verständnis auf logischen Operationen, die Mathematik auf mathematischen. Algorithmische Analyse der Aussagenlogik und Algorithmische Analyse des Systems rationaler Zahlen führen aus, wie Aussagenlogik und Arithmetik auf der Basis des Operationsbegriffes zu rekonstruieren sind.

[5] Vgl. Neumann (1927, 12):

> [D]ie Unentscheidbarkeit ist [...] die Conditio sine qua non dafür, daß es überhaupt einen Sinn habe, mit den heutigen heuristischen Methoden Mathematik zu betreiben. An dem Tage, an dem die Unentscheidbarkeit aufhörte, würde auch die Mathematik im heutigen Sinne aufhören zu existieren; an ihre Stelle würde eine absolut mechanische Vorschrift treten, mit deren Hilfe jedermann von jeder gegebenen Aussage entscheiden könnte, ob diese bewiesen werden kann oder nicht.

Es wird schrittweise versucht, das Reich des Entscheidbaren "von innen" zu erweitern, ohne dass eine Grenze a priori gezogen werden könnte oder das gesamte Gebiet der Mathematik aus irgendeiner Perspektive überblickt werden könnte.

Eine Metamathematik kann es nach einem algorithmischen Beweisverständnis nicht geben, da nach ihr die Syntax nicht an einer vorgegebenen Semantik gemessen werden kann. Logik und Mathematik sind in gewissem Sinne "autonom" und a priori. Sie betreffen allein Formen und damit die Bedingungen der Möglichkeit, Symbole zu interpretieren und zum Zwecke wissenschaftlicher Modellbildung anzuwenden. Mathematische und logische Begriffe erhalten erst durch Algorithmen einen Sinn; die Syntax hat Priorität gegenüber der Semantik. Man kann nur die Zweckmäßigkeit eines logischen oder mathematischen Kalküls an seiner Anwendung bemessen, nicht aber dessen etwaige Korrektheit oder Vollständigkeit. Ebensowenig lassen sich mathematische oder metamathematische Fragen (etwa nach der Grenze der Berechenbarkeit) durch Repräsentation der entsprechenden Aussagen im logischen Formalismus entscheiden. Eine algorithmische Entscheidung entscheidet allein eine formale Eigenschaft der Formeln des Kalküls und keine gehaltvollen Aussagen, deren Sinn und Bedeutung über den autonomen Kalkül hinausgehen. Ein logischer Beweis zeigt nur, dass eine bestimmte Formel aus einer bestimmten Formel nach bestimmten Regel hergeleitet werden kann und folglich die entsprechende Implikation aus Axiomen und Theorem die logische Form einer logischen Tautologie hat. Über die Wahrheit von Sätzen, die Axiome oder Theoreme instanziieren, kann ein logischer Beweis nichts sagen. Formale Logik klassifiziert logische Satzformen; ihre *Anwendung* zum Zwecke des Beweisens von Sätzen unter Voraussetzung von Axiomen geht über eine algorithmische Logik hinaus. Eine derartige Anwendung (etwa zum Zwecke der Evaluation der Schlüssigkeit von Argumenten oder der Axiomatisierung wissenschaftlicher Theorien) ist von philosophischen Fragen und Problemen der formalen Analyse nicht-logischen Ausdrücke betroffen. Sie birgt Chancen und Gefahren, deren Diskussion eine philosophische Aufgabe ist. Eine algorithmische Logik ist unabhängig und vor ihrer Anwendung; die mathematische Logik ist demgegenüber seit ihrer Begründung durch Frege und Russell von ihrer Anwendung auf die Mathematik her gedacht. Metamathematische Unentscheidbarkeitsbeweise, die die Grenzen einer algorithmischen Logik aufzeigen sollen, sind ein konsequenter Ausdruck dieser Priorität der Anwendung der Logik gegenüber ihrer vollständigen Algorithmisierung. Problematisch ist aber diese Anwendung, nicht die Algorithmisierung. Es ist die Anwendung der Logik, der ihrer Grenzen aufzuzeigen sind, nicht die algorithmische Logik.

“Grundlegung” einer algorithmischen Mathematik heißt nicht, die Mathematik auf ein sicheres Fundament möglichst allgemeingültiger Axiome und Beweisregeln zu stellen. In diesem Sinne bedarf es nach dem algorithmischen Verständnis der Mathematik gar keiner Grundlegung, – denn in der Mathematik geht es gar nicht um eine Wahrheit von Sätzen, die an einer wie auch immer gearteten außersymbolischen Wirklichkeit zu bemessen ist. “Grundlegung” einer algorithmischen Mathematik heißt vielmehr einen begrifflichen Rahmen zu entwerfen, innerhalb dessen man Mathematik betreiben kann. Nach dem algorithmischen Verständnis der Mathematik ist Mathematik in erster Linie eine Tätigkeit; ihre Sprache muss analysiert werden, indem untersucht wird, was man mit ihr machen kann, und nicht, indem man sie nach dem Paradigma formal nicht zu entscheidender Aussagesätze analysiert, die sich auf eine außersymbolische Wirklichkeit beziehen. Es ist letztlich die konkrete Art, wie Logik und Mathematik *betrieben* wird, auf die es ankommt. Deshalb seien diese allgemeinen und programmatischen Bemerkungen zur Grundlegung einer algorithmischen Mathematik im Folgenden anhand einer algorithmischen Logik und einer algorithmischen Zahlentheorie konkretisiert.

[In dieser Diskussionsgrundlage übergehe ich Ausführungen zur Arithmetik und Algebra und gebe nur Links zu Vorarbeiten zu diesen Themen an. Die Ausarbeitung einer algorithmischen Logik stellt den Hauptteil meiner Forschungsarbeit dar. Diese Arbeit möchte ich hier nicht zur Diskussion stellen. Es kommt mir in diesem Zusammenhang nur auf die Grundzüge einer algorithmischen Logik an, um Analogien zur Zahlentheorie zu ziehen. Diese Analogien bilden dann den Leitfaden für die Diskussion zu Khintschin-Theorem. Diese Übertragung meiner Arbeit zur Logik auf ein bedeutsames Theorem der Zahlentheorie ist work in progress und als eine Anregung für weitere mathematische Arbeit gedacht.]

6 Algorithmische Logik

Die Hauptaufgabe einer algorithmischen Logik besteht darin, das algorithmische Beweisverständnis auf dem Gebiet der Logik umzusetzen, indem ein Entscheidungsverfahren für die Prädikatenlogik 1. Stufe in Form eines Computerprogrammes ausgearbeitet wird. Dies habe ich für die reine Prädikatenlogik 1. Stufe (ohne Identität, Namen und mathematische Funktionen) gemacht (FOL-Decider[6]). Es entscheidet die formale Eigenschaft der Wider-

[6]Die Erklärung der logischen Grundlagen dieses Verfahrens sowie der Beweis seiner Korrektheit und Terminierung liegt seit Kurzem liegt, ich möchte das aber zunächst intern

sprüchlichkeit. Der Input ist eine prädikatenlogische Formel ϕ. Diese wird zunächst umgeformt in eine anti-pränexe disjunktive Normalform FOLDNF. Insofern die einzelnen Disjunkte keinen Disjunktor im Wirkungsbereich eines Allquantors enthalten, können diese bereits anhand syntaktischer Kriterien entschieden werden (vgl. A Decision Procedure for Herbrand Formulae). Ansonsten wird in einem zweiten Schritt in einem endlichen Suchbaum berechnet, ob die Widersprüchlichkeit der einzelnen Disjunkte unter minimaler Anwendung der $\wedge$-Einführungsregel $\wedge I$ $(A \dashv\vdash A \wedge A)$ sowie abschließender Anwendung der Allquantorbeseitigungsregel $\forall E$ $(\exists\mu \ldots \forall\nu A(\nu) \vdash \exists\mu A(\nu/\mu))$ ein Widerspruch abgeleitet werden kann. Der entscheidende Punkt ist, dass durch geschickte Äquivalenzumformungen in dem Fall, dass kein Widerspruchsbeweis gefunden wird, jeder Beweispfad spätestens dann abgebrochen werden kann, wenn sich ein Beweisschritt wiederholt. Da es im Falle der Widersprüchlichkeit einen Beweis gibt, der mit einer minimalen Anwendung von $\wedge$I und damit ohne eine derartige Wiederholung auskommt, können Wiederholungen auf einem Beweispfad als syntaktisches Kriterium verwendet werden, dass auf dem Pfad kein $\wedge$I-minimaler Beweis gefunden wird. Die prinzipielle Idee des Entscheidungsverfahrens ist vergleichbar mit dem Euklidischen Divisionsalgorithmus zur Entscheidung der Frage, ob eine rationale Zahl eine endliche Darstellung im Dezimalsystem hat: Im positiven Fall ist das Resultat die endliche Darstellung (z.B. $\frac{1}{4} = 0.25$), im negativen Fall gerät die Berechnung in eine Wiederholung und dies kann als Kriterium für die negative Entscheidung verwendet werden (z.B. $\frac{1}{3} = 0.3$ Rest 1, so dass sich die Rechnung $10 \div 3$ wiederholt). Die syntaktische Eigenschaft der Wiederholung eines Rechenschrittes ist Kriterium für die Unmöglichkeit einen Ausdruck mittels Äquivalenzumformung auf eine bestimmte Form zu bringen.

Allgemein besteht das Problem einer algorithmischen Logik darin, logische Satzformen zu identifizieren. Eine logische Form ist das, was alle logisch-äquivalente Formeln gemeinsam haben. Um sie zu identifizieren, sind geeignete Repräsentanten von Äquivalenzklassen zu identifizieren, sowie ein allgemeiner Algorithmus zu definieren, der logische Formeln in ihre Repräsentanten umformt. Ein derartiges Verfahren habe ich – ausgehend von Wittgensteins *ab*-Notation – für Fragmente der Prädikatenlogik entwickelt (Algorithmische Analyse der Aussagenlogik: ab-Notation, Erweiterung der ab-Notation auf die Quantorenlogik). Allgemein können die Repräsentanten über eine vollständig minimierte disjunktive Normalformen der Prädikatenlogik definiert werden, vgl. hierzu Algorithmische Logik und ikonische Logik.

---

diskutieren. Wer sich ernsthaft dafür interessiert, dem gebe ich gerne das Paper.

Das Programm FOL-Optimizer formt beliebige quantorenlogische Formeln in eine minimierte disjunktive Normalform um, vgl. Minimizing Disjunctive Normal Forms of pFOL. Es ist ein praktikables Programm, das noch nicht alle Anforderungen an *vollständig* minimierte FOLDNF erfüllt.

Der algorithmischen Ansatz bietet auch einen neuen Ansatz zu einer "Modelltheorie in den Grenzen des Berechenbaren". Wie wir sehen werden, kann dies als Vorbild für eine "Zahlentheorie in den Grenzen des Berechenbaren" dienen. Die syntaktischen Eigenschaften der resultierenden Repräsentanten ϕ' von Äquivalenzklassen ermöglichen in der Logik strukturelle Bedingungen zu identifizieren, die Modelle (wahr machende Interpretationen) und widerlegende Belegungen (falsch machende Interpretationen) zu unterschieden. Dies lässt sich durch einen mechanischen Paraphrasealgorithmus explizieren und durch einen Algorithmus, der ideal Symbole ϕ' als Regeln zur *Konstruktion* von Modellen und widerlegende Belegungen liest, unter Beweis stellen, vgl. hierzu Algorithmische Logik und ikonische Logik und Chapter 8.3 in New Logic. Wittgenstein's Alternative und ModelCheck. Dieser Ansatz entspricht der Priorität der Syntax gegenüber der Semantik in der algorithmischen Logik. Es werden zunächst durch Äquivalenzumformung *endliche*, ideale Ausdrücke ϕ' generiert, die es erlauben, die strukturellen Eigenschaften von Modellen und widerlegenden Belegungen zu unterscheiden, um auf dieser Grundlage potentiell *unendliche* Modelle und widerlegende Belegungen in Form von Sequenzen (z.B. Folgen von Tupeln natürlicher Zahlen) nach Regeln zu konstruieren bzw. zu generieren. Vereinfacht gesprochen, werden zuerst strukturelle Muster durch Umformung in ideale Symbole identifiziert, bevor auf dieser Grundlage Sequenzen, die diesen Mustern gehorchen, konstruiert werden. Der Weg ins (potentiell) Unendliche verläuft über endliche syntaktische Umformung mit dem Ziel, Symbole zu generieren, die "den Weg ins Unendliche" weisen, indem ihnen Konstruktionsvorschriften unter Voraussetzung der Identifikation struktureller Eigenschaften mittels idealer Ausdrücke ϕ' entnommen werden.

In der klassischen Modelltheorie können nur *gegebene endliche* Interpretationen berechnet werden, indem logische Formeln ϕ (und nicht ideale Symbole ϕ') von innen nach außen substituiert werden. Da es Formeln gibt, die nur im Unendlichen Modelle (oder widerlegende Belegungen) haben, kann auf diese Weise nur ein Teil der Interpretationen in Modelle und widerlegende Belegungen unterschieden werden und dies auch nur, ohne Modelle bzw. widerlegende Belegungen gezielt zu konstruieren. Modelle mit unendlichem Gegenstandsbereich werden weder berechnet noch konstruiert. Sie werden höchstens mengentheoretisch beschrieben. Hierbei wird Unendlichkeit als Kardinalität verstanden (extensionale Unendlichkeit) und sogar Interpretationen mit überabzählbar unendlichem Gegenstandsbereich zugelassen. Die klassische, mengentheoretische Modelltheorie ist nicht berechenbar; man gelangt zu keiner Übersicht über alle Modelle / widerlegende Belegungen noch kann systematisch nach Modellen / widerlegenden Belegungen im Unendlichen gesucht werden. Nach dem Verständnis einer algorithmischen Logik betreibt die klassische Modelltheorie keine Logik, da Modelle, die nur mit den Mitteln der Mengentheorie beschrieben werden können, den Bereich der reinen Logik überschreiten. Eine Modelltheorie im Rahmen einer algorithmischen Logik muss demgegenüber ausgehend von idealen Symbolen ϕ' die Gesamtheit aller konstruierbaren Modelle / widerlegenden Belegungen systematisch konstruieren können.

Beispiel.

Sei ϕ:

$$\neg\exists x \forall y \neg\forall z \neg\exists x_2 \neg(\neg((\neg Hxy \vee (Hzz \wedge \neg Hxx_2))\vee \\ Hx_2x_2) \wedge (\neg(Hx_2z \wedge Hxx_2) \vee Hxz)) \vee (P \wedge \neg P) \qquad (1)$$

Für diese Formel gibt es kein endliches Modell. Nach klassischer, mengentheoretischer Modelltheorie ist es nicht möglich, auf algorithmischen oder methodischem Weg zur Einsicht zur gelangen, dass (1) nicht widersprüchlich ist.[7] „Mathematischer Imagination“[8] mag allerdings dazu führen, dass man erkennt, dass bestimmte Sätze wahre Instanzen der Formel sind. Man erhält z.B. einen wahren Satz, wenn man über natürliche Zahlen quantifiziert und $H(x, y)$ als $y > x$ interpretiert, bzw. genauer folgende Interpretation angibt: $\Im(x, y, z, x_2) = I = \mathbb{N}, \Im(H) = \{(x, y) \mid y > x\}$. Ebensogut könnte man nach klassischer Modelltheorie aber auch als Gegenstandsbereich I die reellen Zahlen oder auch die transfiniten Kardinalzahlen angeben. Auch in diesem Fall erhielte man wahre Sätze als Instanzen.

In der algorithmischen Logik würde man (1) zunächst in eine minimale FOLDNF umformen:

$$\forall x_1 \exists y_1 Hx_1y_1 \wedge \forall x_2 \forall x_3(\neg Hx_2x_3 \vee \forall x_4(\neg Hx_3x_4 \vee Hx_2x_4)) \wedge \forall x_5 \neg Hx_5x_5 \qquad (2)$$

Noch expliziter ist die Darstellung in einer idealen Notation, die logische Konstanten als logische Operationen definiert, und in der die strukturelle Eigenschaften identifiziert werden, die allen Modellen gemeinsam sind:

[7] Vgl. Hilbert & Bernays (1968), S. 14, die anhand eines mit (1) äquivalentem Axiomensystem die Begrenztheit ihrer “Methode der Aufweisung” – der Suche nach Modellen durch Auswertung endlicher Interpretationen – aufzeigen.

[8] Vgl. Kreisel (1987), S. 509.

$$\mathtt{W} - \left\{ \forall\ {}_1\ \exists\ {}_2\ -\mathtt{W}-H_{12},\quad \forall <^1_1\ -\mathtt{F}-H_{12},\quad \forall \begin{array}{l} \diagup^{1}\ \forall \begin{array}{l} \diagup^{2} \qquad\qquad -\mathtt{F}-H_{12} \\ \diagdown_{1}\ \ \forall \begin{array}{l} \diagup^{2}\ -\mathtt{F}-H_{12} \\ \diagdown_{2}\ -\mathtt{W}-\mathtt{H}_{12} \end{array} \end{array} \\ \diagdown_{1} \end{array} \right\}.$$

Dieser ideale Ausdruck kann durch Äquivalenzumformung aus (1) gewonnen werden. Er kann durch eine mechanische Paraphrase von außen nach innen direkt als Beschreibung strukturellen Eigenschaften, die allen Modellen gemeinsam sind, gelesen werden. Hierzu sei mit $\overline{\Im}(H)$ auf Paare (2-Tupel) Bezug genommen, die nicht unter die Menge $\Im(H)$ all der Paare fallen, die $H(x,y)$ erfüllen. $\Im^*(H)$ bezeichne die Vereinigung von $\Im(H)$ und $\overline{\Im}(H)$. Die mechanische Paraphrase des idealen Symbols für (1) lautet:

Interpretationen sind Modell von (1) gdw.

- alle Gegenstände an der 1. Stelle der 2-Tupel von $\Im(H)$ kombiniert mit mindestens einem Gegenstand an der 2. Stelle der 2-Tupel von $\Im(H)$ $\Im^*(H)$ erfüllen; und

- alle Gegenstände, dieselben an der 1. Stelle und der 2. Stelle derselben 2-Tupel von $\overline{\Im}(H)$, $\Im^*(H)$ erfüllen; und

- alle Gegenstände, aufgeteilt auf die 1. Stelle der 2-Tupel von $\overline{\Im}(H)$ und die 1. Stelle der 2-Tupel von $\Im(H)$, kombiniert mit allen Gegenständen, aufgeteilt auf die 2. Stelle der 2-Tupel von $\overline{\Im}(H)$ und die 1. Stelle der 2-Tupel von $\overline{\Im}(H)$, kombiniert mit allen Gegenständen, aufgeteilt auf die 2. Stelle der 2-Tupel von $\overline{\Im}(H)$ und die 2. Stelle der 2-Tupel $\Im(H)$, $\Im^*(H)$ erfüllen.

Diese Paraphrase lässt sich als Konstruktionsvorschrift für Modelle verstehen, wie man sich anhand des folgenden Modelles vor Augen führen kann:

$$\begin{array}{ll} I = & \{1,2,3,\ldots\}, \\ \Im^*(H) = & \{\overline{(1,1)},(1,2),(1,3),(1,4),\ldots \\ & (\overline{(2,1)},\overline{(2,2)},(2,3),(2,4),\ldots \\ & (\overline{(3,1)},\overline{(3,2)},\overline{(3,3)},(3,4),\ldots \\ & \qquad\qquad\ddots \qquad\qquad\qquad\qquad \}. \end{array}$$

7 Algorithmische Zahlentheorie

So wie die mathematische Logik einer extensionalen mengentheoretischen Semantik Priorität gegenüber der syntaktischen Manipulation endlicher logischer Ausdrücke einräumt, geht die moderne Zahlentheorie von einer Priorität extensional unendlicher Folgen gegenüber der Definition von Zahlen mittels endlicher, mathematischer Gleichungen aus. Dies wird z.B. deutlich in der Definition reeller Zahlen als Äquivalenzklassen von Cauchy Folgen rationaler Zahlen und den reellen Zahlen als Menge aller Grenzwerte von Cauchy Folgen rationaler Zahlen. Der so konzipierte Raum reeller Zahlen ist wie der Raum der Interpretationen der klassischen Semantik in der Logik kein geeigneter Suchraum für algorithmische Probleme. Er setzt ein extensionales Verständnis der Unendlichkeit voraus. So wie sich nur endliche Interpretationen in der klassischen Semantik auswerten lassen, ohne dass dadurch logische Fragen wie z.B. die nach der Widersprüchlichkeit logischer Formeln entschieden werden können, können nur Fragen in Bezug auf endliche Folgen berechnet werden, ohne dass damit zahlentheoretische Fragen wie z.B. die nach der (Ir)Rationalität einer Zahl, dem Maß ihrer rationalen Approximation oder der Identität reeller Zahlen entschieden werden können. Analog zur Beschränkung der Semantik auf die Konstruktion von Modellen / widerlegenden Belegungen aus idealen Repräsentanten von Äquivalenzklassen in der Logik, sind in einer algorithmischen Zahlentheorie Folgen auf solche zu beschränken, die sich nach bestimmten Vorschriften aus finiten[9] Gleichungen konstruieren lassen. Wir wollen uns im Weiteren auf Folgen rationaler Zahlen, die aus finiten Gleichungen gewonnen werden, beschränken.

In einer so verstandenen algorithmischen Zahlentheorie werden Zahlen nicht über Grenzwerte von Folgen definiert, sondern ihre Identitätskriterien entstammen mathematischen Gleichungen, denen Gesetze für ihre rationale Approximation zu entnehmen sind. Wir wollen derartige Zahlen im Folgenden "primäre Zahlen", kurz P-Zahlen nennen. Im Gegensatz zur klassischen Theorie reeller Zahlen strebt eine algorithmische Zahlentheorie keine Universalität oder Vollständigkeit, sondern Entscheidbarkeit an. Sie wird nicht von "der überabzählbaren Menge reeller Zahlen" sprechen, sondern von diversen Zahlsystemen, die ihre Herkunft in unterschiedlichen Gleichungen und Rechengesetzen haben und die unterschiedliche Konstruktionen rationaler Folgen ermöglichen. Der Begriff der P-Zahl ist weder über eine (vollständige, überabzählbare) Menge an Cauchy Folgen noch über ein einheitliches syntaktisches System definiert, sondern über (finite) Gleichungen, die es ermöglichen, gesetzmäßige Folgen rationaler Zahlen zu konstruieren, die die P-Zahl annähern.

[9] Finite Gleichungen werden in Abschnitt 7.3 näher charakterisiert; die Kennzeichnung "finit" soll einen impliziten Bezug auf die Unendlichkeit (z.B. in unbestimmten Integralen) oder einen expliziten Bezug durch "∞" (z.B. in der Definition einer oberen Schranke) oder "..." ausschließen.

Für die Untersuchung von Eigenschaften der rationalen Approximation von P-Zahlen reicht es – wie im Fall Turing-berechenbarer Folgen – nicht, jedes beliebige n-te Glied Schritt für Schritt berechnen zu können (etwa durch Einsetzen in eine Gleichung). Diese Art Konstruktion einer Folge gleicht– wie Hilberts "Methode der Aufweisung" in der logischen Semantik – einem "Ausprobieren im Endlichen"; sie weist keinen Weg ins Unendliche. Eine algorithmische Zahlentheorie beruht demgegenüber auf aus Gleichungen gewonnen rekursiven oder expliziten Formeln, die bestimmen, *nach welchem Gesetz* sich die Folgen entwickeln. Wir nennen die resultierenden Folgen "gesetzmäßige Folgen" und unterscheiden diese von dem allgemeineren Begriff der "berechenbaren Folgen", der nur verlangt, dass jedes einzelne Folgeglied nach einer Rechenvorschrift berechnet werden kann. Berechenbare Folgen sind wiederum von Zufallsfolgen zu unterscheiden, für die noch nicht einmal eine Rechenvorschrift bekannt sein muss, um das n-te Glied zu berechnen. Die Definition reeller Zahlen über Cauchy-Folgen lässt Zufallsfolgen zu. Eine algorithmische Zahlentheorie hingegen gewinnt Zahlen nicht über Grenzwerte von Folgen, sondern durch finite Gleichungen und sie untersucht gesetzmäßige Folgen, die sich aus diesen konstruieren lassen. Die Gleichungen sind primär, Folgen sekundär.

Eine algorithmische Zahlentheorie ist strenger als eine auf primitiv rekursive Funktionen oder Turing-berechenbare Folgen beschränkte Zahlentheorie. Ihr geht es nicht um die Berechnung einzelner Folgeglieder, sondern um mathematische Gesetze zur Konstruktion von Folgen. In Wittgensteins Terminologie[10] gesprochen, geht es ihr um *Operationen*, die eine Serie von Formen konstruieren und nicht um Funktionen, die Extensionen beschreiben. Man muss an den Folgen ein Konstruktionsgesetz ablesen können, um über ihre formalen Eigenschaften entscheiden zu können, – Folgen, die keiner internen Gesetzmäßigkeit gehorchen, reichen nicht aus, selbst wenn sich jedes n-te Glied berechnen lässt.[11]

[10] Vgl. zur Wittgensteinschen Kritik an "Pseudo-Zahlen" sowie dem Zusammenhang zu Fragen der Entscheidbarkeit und Unentscheidbarkeitsbeweisen der mathematischen Logik Wittgenstein on Pseudo-Irrationals, Diagonal Numbers and Decidability.

[11] Vgl. Wittgenstein (1991a, §190):

> Es tritt uns hier immer wieder etwas entgegen, was man 'artihmetisches Experiment' nennen könnte. Was herauskommt, ist zwar durch das Gegebene bestimmt, aber ich kann nicht erkennen, *wie* es dadurch bestimmt ist. (Ähnlich, wie es z.B. mit dem Auftreten der 7 in π geht.) So kommen auch die Primzahlen bei der Methode sie zu suchen heraus, als Resultate eines Experiments. Ich kann mich zwar davon überzeugen, dass 7 eine Primzahl ist, aber ich sehe den Zusammenhang nicht zwischen ihr und der Bedingung, der sie entspricht. – Ich habe sie nur gefunden und nicht erzeugt.

Um z.B. zu entscheiden, ob $\sqrt{2}$ irrational ist, hilft die Dezimalzahlentwicklung, die man durch sukzessives Einsetzen in $x^2 = 2$ und z.B. Intervallschachtelung gewinnt, nicht weiter.[12] Formt man $x^2 = 2$ hingegen in $x - 1 = \frac{1}{2+(x-1)}$ um, kann man dieser Gleichung das Konstruktionsgesetz für den regulären Kettenbruch für $\sqrt{2} - 1$ entnehmen, das die Folge generiert bzw. den periodischen Kettenbruch $[\bar{2}]$.[13] Die Irrationalität von $\sqrt{2}$ lässt sich dann anhand einer syntaktische (formalen) Eigenschaft entscheiden, denn rationale Zahlen können in der regulären Kettenbruchnotation dadurch identifiziert werden, dass sie endliche Darstellungen besitzen. Die Unmöglichkeit, $\sqrt{2}$ auf eine rationale Form zu bringen, zeigt sich – ganz analog wie die Unmöglichkeit, $\frac{1}{3}$ im Dezimalzahlsystem endlich darzustellen – an der Periodizität der Darstellung.

Die Entwicklung der Mathematik ist in erster Linie die Entwicklung der mathematischen Sprache und diese zeichnet sich gegenüber der informellen Sprache dadurch aus, dass in ihr gerechnet werden kann und hierdurch mathematische Probleme definiert und entschieden werden können. Im Folgenden sei kurz angedeutet, wie das Reich der P-Zahlen schrittweise durch Erweiterung der Sprache der Mathematik rekonstruiert werden kann. Uns kommt es hierbei insbesondere darauf an, zu zeigen, dass nicht Universalität sondern Entscheidbarkeit die treibende Kraft in einer algorithmisch verstandenen Mathematik ist. Deshalb ist die Konstruktion der Zahlen genauso wie

---

> Ich suche sie, aber ich erzeuge sie nicht. Ich sehe wohl ein Gesetz in der Vorschrift, die mich lehrt die Primzahlen zu finden, aber nicht in den Zahlen, die dabei herauskommen. Es ist also nicht wie in $+\frac{1}{1!}, -\frac{1}{3!}, +\frac{1}{5!}$, etc. wo ich ein Gesetz *in den Zahlen* sehe.
> Ich muss ein Stück der Reihe anschreiben können, so dass man das Gesetz *erkennt*.
> D.h. in diesem Angeschriebenen darf keine *Beschreibung* vorkommen, sondern alles muss dargestellt sein.
> Die Näherungswerte müssen selbst eine *offenbare* Reihe bilden. D.h. die Näherungswerte selbst müssen sich in einem Gesetz bewegen.

[12] Vgl. Wittgenstein (1994, 91):

> Der Vorgang des Wurzelziehens aus 2 im Dezimalsystem z.B., ist auch ein ARITHMETISCHES EXPERIMENT; aber das heisst eben dass dieser Vorgang der $\sqrt{2}$ nicht wesentlich ist, und es müsste eine Darstellung geben, in der das Gesetz rein zu erkennen ist.

[13] Vgl. Wittgenstein (1994, 126):

> [...] in $\frac{1}{2}, \frac{1}{2+\frac{1}{2}}, \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}$ etc. [sieht] man das Gesetz, das man in der Dezimalentwicklung nicht sieht.

auch die Methode, zahlentheoretische Probleme anzugehen, in der algorithmischen Zahlentheorie "induktiv": Verallgemeinerung darf nicht auf Kosten der Entscheidbarkeit gehen, sondern muss schrittweise vom Speziellen zum Allgemeinen gewonnen werden. Diese Methode ist der logisch-axiomatischen Methode diametral entgegengesetzt. Die logisch-axiomatische Methode setzt bei allgemeinen Axiomen an, verwendet die Sprache der Prädikatenlogik als Universalsprache, reduziert Beweise auf logische Deduktion und interpretiert die Sprache der Logik mit Mengentheorie. Nach dieser Methode ist Universalität und nicht mehr Entscheidbarkeit allein maßgeblich. Gemäß einer algorithmischen Mathematik ist dieser Preis zu hoch, die Methode nicht vor Irrtümern gefeit (siehe Church-Turing Theorem) und genuin mathematische Problemstellungen geraten aus dem Fokus. Letzteres wollen wir in Abschnitt 7.6 anhand von Khintschins Theorem veranschaulichen.

[In den beiden folgenden Abschnitte fasse ich nur kurz zusammen, was ich an anderer Stelle schon etwas näher ausgearbeitet habe. Dies sollte für einen Gesamtüberblick ausreichen. Uns kommt es hier vor allem auf die Grundideen und auf die abschließende Diskussion von Khintschins Theorem an.]

7.1 Rationale Zahlen

Die rationalen Zahlen bilden das Fundament einer algorithmischen Zahlentheorie. Im Gegensatz zu Russells und Freges mengentheoretischem Zahlverständnis, hat Wittgenstein im *Tractatus* den Begriff der Zahl auf den der Operation zurückgeführt, vgl. Wittgenstein (1984a, 6.02-6.031). Er definiert natürliche Zahlen als Exponenten von Operationen. Zahlen werden hierdurch nicht explizit durch bedeutungsgleiche Ausdrücke definiert, sondern implizit dadurch, wie sie in welchem Kontext eingeführt (gebraucht) werden:

> Und *so* kommen wir zu den Zahlen: Ich definiere
>
> $$x = \Omega^{0}\text{'}x \quad \text{Def.}$$
> $$\Omega\text{'}\Omega^{\nu}\text{'}x = \Omega^{\nu+1}\text{'}x \quad \text{Def.}$$

Wittgensteins Definitionen sind so zu lesen, dass links des Gleichheitszeichen steht, wovon er ausgeht (Definiens) und rechts, wie er zu den Zahlen "kommt" (Definiendum). Ω steht für die Anwendung einer Operation, der Exponent von Ω zählt Anwendungen der Operation, x steht für eine Anfangsbasis der Anwendung einer Operationen. Operationen lassen sich, ausgehend von einer Anfangsbasis, iterativ anwenden und umkehren. Operationen werden rein syntaktisch als Anweisungen zur Konstruktion von

Formen definiert, die in einer adäquaten Notation zum Ausdruck kommt. $+, -, \cdot, \div$ sind nach diesem Verständnis arithmetische Operationen, die im Rahmen einer Theorie rationaler Zahlen über einen Algorithmus zur Konstruktion idealer Repräsentanten rationaler Zahlen definiert werden. Einen solchen Algorithmus habe ich den Maximen einer algorithmischen Mathematik entsprechend in einem Computerprogramm detailliert ausgearbeitet. Die arithmetischen Operationen bilden hierbei ein System, in dem $+$ und die Umkehroperation $-$ sowie $\cdot$ und die Umkehroperation $\div$ sich auf unterschiedliche Dimensionen beziehen: Erstere auf das Zählen der Anwendung von Operationen, letztere auf das Zählen von Zähloperationen von Operationen. In Algorithmische Analyse des Systems rationaler Zahlen wird ausgeführt, wie sich das System der rationalen Zahlen vollständig aus einem allgemeinen Operationsbegriffes herleiten lässt und es wird dieser Ansatz der Rekonstruktion der Arithmetik gemäß der mathematischen Logik gegenübergestellt, vgl. hierzu auch Kurzfassung in Form von Vorlesungsfolien. Dieser Ansatz erklärt Besonderheiten des Rechnens (z.B. Rechnen mit 0, Minus mal Minus ergibt Plus) ohne ad-hoc Gesetze, Fallunterscheidungen oder Axiome einzuführen.

7.2 Algebraische Zahlen

Arithmetik verstehen wir hier in einem sehr engen Sinn als das Rechnen mit den Operationen $+, -, \cdot, \div$ unter alleiniger Voraussetzung der Zähloperation (Nachfolgeroperation) mit der Anfangsbasis 0. Sie konstituiert damit die rationalen Zahlen und das Rechnen mit ihnen in rein arithmetische Gleichungen. Das Operieren mit rationalen Zahlen bildet das Fundament der algorithmischen Zahlentheorie, mit dem jede weitere Erweiterung vereinbar sein muss. Algebraische Zahlen entstehen durch zwei Erweiterungen: der Umkehroperation $\surd$ (Wurzelziehen) zur Operation $\hat{}$ (Potenzieren) und der Einführung von x in Gleichungen. Ersteres definiert Radikale, letzteres algebraische Zahlen. Auch die Operation *Log* (Logarithmus) kann als Umkehrung von $\hat{}$ verstanden werden. Alle Resultate der Operationen $+, \cdot, \hat{}$ und ihrer Umkehrungen sind Zahlen, die explizit durch Operationen konstruiert und hierdruch definiert werden können. Wir fassen sie als Ω-Zahlen zusammen. Demgegenüber können algebraische Zahlen auch implizit nur über Lösungen algebraischer Gleichungen definiert werden, ohne das Resultat der Anwendung von Operationen zu sein. Wir betrachten nur die Einführung algebraischer Zahlen über *rationale* Polynome.

In Algebra 1 werden Radikale und Potenzgesetze in Erweiterung des Systems rationaler Zahlen eingeführt, wobei Eindeutigkeit verloren geht.

Algebra 2 betrifft die Erweiterung des Reiches der Zahlen durch implizite Definitionen mittels Gleichungen, deren Lösung sich nicht in Form von Radikalen angeben lassen. Es wird anhand des Kronecker Algorithmus gezeigt, wie formale Eigenschaften algebraischer Zahlen entschieden werden können, ohne diese eindeutig zu lokalisieren und es wird gezeigt, wie hiervon Gebrauch gemacht werden kann für die Entscheidung geometrischer Probleme (Konstruierbarkeit von Polygonen, Teilung von Winkeln). Es wird damit die Priorität des Rechnens mit algebraischen Gleichungen gegenüber der Annäherung ihrer Lösungen dargelegt. Es wird der Analyse algebraischer Gleichungen als propositionaler Funktionen eine algorithmische Analyse gegenübergestellt, nach der ein algebraischer Kalkül irreduzibel ist und – im Gegensatz zur Arithmetik – mit Buchstaben rechnet. Drei Verwendungen von x als (i) Buchstabe in einem algebraischen Kalkül, (ii) Variable für rationale Zahlen in Induktionsbeweisen und (iii) Unbekannte bei der impliziten Definition von Zahlen durch algebraische Gleichungen werden unterschieden. Es wird auf die besondere Bedeutung von Induktionsbeweisen in der algorithmischen Mathematik eingegangen und erklärt, warum diese nicht auf axiomatische Beweise von Allaussagen reduziert werden können. Schließlich wird unter Rückgriff auf die Galoistheorie ausgeführt, wie entschieden wird, ob algebraische Gleichungen durch Radikale gelöst werden können.

7.3 Primäre Zahlen

Wir wollen mit dem Begriff der primären Zahlen (P-Zahlen) das Reich der Zahlen im Wesentlichen um die Operationen des Differenzieren und Integrierens und damit um Zahlen, die über analytische Gleichungen definiert sind, erweitern. Wir beschränken uns auf gewöhnliche Differentialgleichungen mit rationalen Funktionen und auf bestimmte Integrale mit rationalen Funktionen. P-Zahlen sind folglich Zahlen, die auf eine grundlegende Weise mathematisch definiert sind. Es kommt neben rationalen Zahlen und den mathematischen Grundoperationen nur noch x vor. Wir betrachten nur Gleichungen, die endlich viele Lösungen haben, die sich unterscheiden lassen. P-Zahlen können also entweder explizit als Ω-Zahlen oder implizit als eine Lösung einer finiten algebraischen oder analytischen Gleichung definiert werden. Durch den – zugegebenermaßen sehr einschränkenden – Bezug zu rationalen Funktionen bleibt der Bezug zu den rationalen Zahlen als dem Fundament einer algorithmischen Zahlentheorie deutlich. Die Euler-Mascheroni Konstante ($\gamma = \int\limits_1^\infty (\frac{1}{[x]} - \frac{1}{x})dx$) ist z.B. keine P-Zahl, da in ihr ∞ und die Floor-Funktion (Abrundungsfunktion) vorkommt. Ersteres ist nicht zulässig, da hierdurch eine Folge definiert wird (während P-Zahlen durch finite Gleichungen definiert werden); letzteres ist nicht zulässig, da die Floor-Funktion genuin eine Funktion und keine Operation ist.

Wir sehen im Folgenden von genuin komplexen Zahlen, wie z.B. der Ω-Zahl i, ab, da es uns vor allem um das Verhältnis von P-Zahlen und ihrer rationalen Approximation geht. In Bezug auf ursprünglich geometrisch (inkl. trigonometrisch) definierte Zahlen wie z.B. $\sqrt{2}$ (Diagonale im Einheitsquadrat) oder π (Umfang eines Kreises mit Durchmesser 1, Fläche eines Kreises mit Radius 1) setzen wir voraus, dass diese sich über arithmetische, algebraische oder analytische Ausdrücke definieren lassen. Wir verstehen z.B. die Definition von $\sqrt{2}$ über $x^2 = 2$ oder eine Definition von π über $\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2} dx$ als einen symbolischen Ausdruck der geometrischen Figuren und beschränken uns auf die rein symbolischen Ausdrücke. *Sekundäre* Zahlen nennen wir im Unterschied zu primären Zahlen solche, die primäre Zahlen mit den Operationen verknüpfen, über die wir primäre Zahlen definieren, z.B. $e + \pi$. Beweise für primärer Zahlen lassen sich nicht ohne Weiteres auf sekundäre Zahlen übertragen. e und π sind transzendent, es ist aber noch nicht einmal bekannt, ob $e + \pi$ rational ist. Wir beschränken uns im Weiteren auf primäre Zahlen.

Uns kommt es nicht auf einen exakten Begriff von P-Zahlen an. Wichtig ist, dass all die Zahlen, die in der Schulmathematik und angewendeten Mathematik eine zentrale Rolle spielen (paradigmatisch genannt seien $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, e, π), enthalten sind. Die primären Zahlen haben eine bekannte, genuin mathematische Herkunft. Gemäß der Maximen einer algorithmischen Zahlentheorie ist es zunächst wichtiger, für einschlägige, paradigmatische Zahlen klare Ergebnisse zu zielen, als einen möglichst umfassenden Zahlenraum zu betrachten, für den nur noch höchst abstrakte Theoreme bewiesen werden können, aus denen sich keine konkrete Aussagen über einzelne Zahlen ableiten lassen (vgl. unten die Diskussion zu Khintschins Theorem). Wir ziehen es vor, den Bereich der P-Zahlen zunächst eng zu fassen, um die Besonderheiten eines Kernbereiches der Mathematik auszuzeichnen. Es kommt uns nicht auf eine Vollständigkeit wie im Falle der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ an. Uns kommt es vielmehr auf die Grundidee an, eine algorithmische Zahlentheorie für einen Kernbereich genuin mathematischer Zahlen zu betreiben und eine solche Theorie mit einem Ansatz zu vergleichen, der reelle Zahlen über beliebige Folgen definiert. Wir wollen damit nicht behutsame Erweiterungen des Begriffes der P-Zahlen, die für bestimmte Untersuchungen zweckmäßig sein können, ausschließen. Die Erweiterung des Symbolismus und der zugelassenen Funktionen ist aber ein Schritt, dessen Kosten in Hinblick auf die Entscheidbarkeit der Probleme abgewogen werden muss.

Wir orientieren uns mit unserem Verständnis von P-Zahlen an Langs "classical numbers" (z.B. Lang (1971, 635)), an Hardys "numbers that appear naturally in analysis" (Hardy (2008, 45,208)) und auch an den sogenannten "periods" von M. Kontsevich and D. Zagier.[14] Lang und Hardy lassen beide aber die Euler-Mascheroni Konstante zu, Lang nennt auch $e+\pi$ eine classical number, während sie für uns eine sekundäre Zahl ist. Unser Begriff der P-Zahl ist folglich enger als Langs *classical numbers* oder Hardys *natural numbers in analysis.* Alle schließen aber – wie Wittgenstein – Zahlen aus, die nur über Notationen definiert sind. Hierunter fällt z.B. Liouvilles Konstante ($c = \sum_{j=1}^{\infty} 10^{-j!}$), die über die Dezimalzahlnotation definiert ist. Liouvilles Konstante ist für uns eine gesetzmäßige Folge, die keine P-Zahl annähert. Die Gesetzmäßigkeit einer Folge ist wesentlich, um Beweise über ihre Eigenschaften führen zu können. Die Definition von Liouvilles Konstante erlaubt, direkt zu entschieden, dass sie irrational ist. Sie ist die erste Zahl, deren Transzendenz bewiesen wurde. Auch das Maß ihrer rationalen Bestapproximation kann bestimmt werden (s.u. Abschnitt 7.6). Anders als z.B. π hat Liouvilles Konstante aber keine Herkunft in Gleichungen; ihr fehlt damit ein mathematischer Gehalt, den ein mathematischer Kalkül (z.B. Arithmetik, Algebra, Analysis) verleiht, mit dem spezifische Probleme einer angewandten Mathematik gelöst werden können. Sie wird nicht aus finiten Gleichungen konstruiert und fällt damit aus dem Gegenstandsbereich einer algorithmischen Zahlentheorie nach unserem Verständnis heraus.

Andere Folgen, die über eine Notation und nicht über eine finite Gleichung definiert sind, sind nicht gesetzmäßig, aber berechenbar. Wittgensteins Paradigma hierfür ist die Zahl $\pi^{3\to 7}$, die identisch mit der Dezimalentwicklung von π ist, nur dass 3 durch 7 ersetzt wird. Ein anderes Beispiel ist die Dualfolge *Gold*, die mit 0. beginnt und deren n-tes Glied 0 ist gdw. die n-te gerade Zahl die Summe zweier Primzahlen ist. Diese Folge ist berechenbar, aber die Art der Berechnung liefert keinen Anhaltspunkt dafür, wie die Folge sich weiter entwickelt. Dies bedingt, dass nicht entschieden werden

[14]Vgl. hierzu vor allem Waldschmidt (2006), der in Anspielung an Hardy *periods* wie folgt charakterisiert: "those which are 'interesting', which appear 'naturally', which deserve our attention". Waldschmidt stellt viele für eine algorithmische Zahlentheorie interessante Untersuchungen zur Transzendenz und zu Liouville Zahlen an. Er vermutet u.a. auf Grund messtheoretischer Überlegungen, dass Liouville Zahlen keine *periods* sind, was ganz in unserem Sinne ist. Über Waldschmidt hinaus fordern wir eine systematische Untersuchung der Messgeschwindigkeit der rationalen Approximationen von P-Zahlen, um ihre Messgeschwindigkeit mit Khintschins Theorem zu vergleichen.

kann, ob die Folge den Grenzwert 0 hat oder nicht, solange Goldbachs Vermutung nicht entschieden ist. *Gold* ist ein Analogon zu Brouwers Zahl, die über Fermats Vermutung definiert ist, und Brouwer (und im Anschluss an ihn Wittgenstein) als Beispiel einer Zahl diente, über deren Grenzwert nicht entschieden werden konnte. Mittlerweile gilt Fermats Vermutung als bewiesen, so dass man die Brouwer Zahl mit 0 identifizieren kann. Wir würden trotzdem die *Definition* der Brouwer Zahl ausschließen, da sie Fallunterscheidungen trifft und Umgangssprache verwendet. Man gewinnt mit dieser Definition nichts für eine algorithmische Zahlentheorie. Alleinige Definition über eine Notation (z.B. Dual- oder Dezimalnotation) ist ein Ausschlusskriterium für P-Zahlen. P-Zahlen sind unabhängig von einer Notation durch finite Gleichungen definiert; um sie mittels gesetzmäßiger Folgen rationaler Zahlen anzunähern, sind allererst adäquate Notationen auszuwählen. In Wittgensteins Terminologie formuliert sind Notationen "Diener" und nicht "Herrn", Wittgenstein (1994, 41,42).

Auch Diagonalzahlen haben weder eine Herkunft in finiten Gleichungen, noch sind sie im Allgemeinen gesetzmäßige Folgen und sie sind nur berechenbar, insofern sie nicht Teil der Aufzählung von Folgen sind, über die sie definiert sind. Sie fallen aus dem Bereich einer algorithmischen Zahlentheorie heraus. Damit entfällt auch die Möglichkeit, zu beweisen, dass bestimmte Mengen "überabzählbar" sind. Die algorithmische Zahlentheorie ist nicht interessiert an möglichst mächtigen Mengen von Zahlen, sondern an *Systemen* von Zahlen und Gleichungen. Systeme unterscheiden sich von Mengen dadurch, dass sie über Operationen und damit über interne, formale Zusammenhänge definiert sind.

Zahlreiche berechenbare und nicht-berechenbare Folgen sind nur mittels einer standardisierten Umgangssprache ("Wortsprache") oder, was zumeist auf dasselbe hinausläuft, mengentheoretischer bzw. logischer Sprache definiert. Frege dienten hierfür Zahlen, die über die reelle Dirichlet-Funktion ($D(x) = 1$, wenn x rational, sonst 0) definiert sind (z.B. $D(e + \pi)$).[15] Logische Konstante oder ihre umgangssprachlichen Pendants schließen wir für die Definition von Zahlen ebenso aus wie mengentheoretisches Vokabular wie $\mathbb{R}$, $\in$ o.ä. Die Notwendigkeit der Verwendung dieser Sprache betrachtet wir vielmehr als ein Indiz dafür, dass die Grenzen der algorithmischen Mathe-

[15] Vgl. Frege (1891, 25)):

> Man ist ... genötigt worden, zu der Wortsprache seine Zuflucht zu nehmen, da die Zeichensprache der Analysis versagt, wenn z.B. von einer Funktion die Rede war, deren Wert für rationale Argumente 1 und für irrationale 0 ist.

matik überschritten werden. Was immer informell oder mengentheoretisch / logisch formuliert wird, stellt nach unserem Verständnis eine Aufgabe an den algorithmischen Mathematiker: Trachte nach einer Übersetzung in genuin mathematische Sprache, die mathematische Probleme entscheiden lässt; geht dies nicht, fällt das Problem aus deinem Zuständigkeitsbereich heraus. Man muss nicht – wie Frege – urteilen, dass man als Mathematikerin genötigt ist, zur Wortsprache Zuflucht zu nehmen. Man kann sie auch als Sprache verstehen, die sich durch ihre Universalität auszeichnet, und die mathematische Aufgabe darin sehen, sie weitgehend durch eine Sprache zu ersetzen, die sich durch ihre Entscheidbarkeit auszeichnet. Das Ideal der algorithmischen Mathematik besteht darin, Probleme so mathematisch auszudrücken, dass sie sich algorithmisch lösen lassen.

Zufallszahlen sind über nicht-berechenbare Folgen definiert. Diese sind oftmals nur noch durch Wortsprache definierbar, wie z.B. "die Zahl, die identisch mit dem Grenzwert der Dezimalzahlfolge von $\sqrt{2}$, außer der n-te Präsident der Vereinigten Staaten ist eine Frau: in diesem Fall sei die $n$te Nachkommastelle um 1 erhöht, wenn sie kleiner als 9 ist, und 0 sonst". Auch eine Chaitinsche Konstante ($\Omega = \sum_{p \text{ halts}} 2^{-|p|}$, wobei p über die Zahlen haltender Turing-Maschinen läuft) ist ein Paradigma für eine nicht-berechenbare, transzendente Zahl. Von einem rein extensionalen Standpunkt lässt sich sogar von nicht definierbaren Folgen und deren Grenzwerten sprechen: Sprachliche Ausdrücke lassen sich schließlich aufzählen; reelle Zahlen sind hingegen überabzählbar. Es gibt folglich Zahlen, die nicht mehr einzeln definierbar sind. Sie sind Teil einer Menge, über die man allenfalls quantifizieren kann, und deren allgemeine Eigenschaften man beschreiben kann, ohne dass man die einzelnen Instanzen der Menge als Individuen benennen könnte.

Man sieht: Ein universeller Zahlbegriff überwindet alle Schranken, selbst die der Sprache. Einer algorithmische Mathematik geht dies zu weit; die Grenzen der Sprache sind für sie unüberwindbar. Sie wird versuchen, das Reich der Zahlen schrittweise aus dem Zentrum der rationalen Zahlen erweitern, ohne aus dem Blick zu lassen, welche Kosten in Bezug auf mathematische Berechenbarkeit dabei gezahlt werden müssen. Der Begriff der P-Zahlen ist ein Versuch, eine Grenze zu ziehen, die den Maßstab der Berechenbarkeit und Relevanz hoch hält, und doch – wie wir im folgenden Abschnitt zeigen werden – dabei einen Grenzbereich markiert, der viele Fragen offen lässt.

7.4 Gesetzmäßige Epsilontik

Ein großer Vorteil der Definition der P-Zahlen ist, dass für diese Zahlen Gesetze (explizite oder rekursive Funktionen) für ihre Annäherung mit rationalen Zahlen abgeleitet werden können. Im Falle algebraischer Gleichungen steht das Newton-Verfahren zur Verfügung; Bombieri & van der Poorten (1975) geben ein Verfahren an, gesetzmäßige reguläre Kettenbrüche für algebraische Zahlen zu konstruieren; Quadratwurzeln lassen sich durch maximal-beschleunigte, gesetzmäßige, reguläre Kettenbrüche, e lässt sich durch einen gesetzmäßige regulären Kettenbruch; π durch einen gesetzmäßigen irregulären Kettenbruch annähern; Ausdrücke für Strecken lassen sich durch Polygonzüge im analytischen Sinne; Ausdrücke für Flächen lassen sich durch Riemansummen rational annähern; alle in der Definition verwendeten Funktionen sind analytisch und lassen sich durch Potenzreihen bzw. Taylorreihen annähern. Diese Möglichkeit, gesetzmäßige rationale Annäherungen aus den Definitionen der P-Zahlen zu definieren, ist für unsere Diskussion der rationalen Bestapproximationen in den Abschnitt 7.5 - 7.7 zentral.

Gesetzmäßige Folgen sind nach unserem Verständnis nur solche berechenbare Folgen, die durch rein mathematische Gesetze definiert sind, und zwar entweder in Form einer expliziten Vorschrift, in der das n-te Glied der Folge durch Angabe einer mathematischen Funktion aus n berechnet wird, oder in Form einer rekursiven Vorschrift, in der das n-te Glied aus den vorangegangen Glieder durch Angabe einer mathematischen Funktion berechnet wird. Für viele berechenbare Folgen kann keine mathematische Formel angegeben werden, die ein Gesetz der Folge beschreibt, vielmehr kann nur jede einzelne Stelle nacheinander berechnet werden. Dies trifft z.B. für die von Wittgenstein viel diskutierte Dualfolge $Prim$ zu, deren n-te Stelle 0 ist, wenn n eine Primzahl ist und 1 sonst. In diesem Fall kann weder eine explizite Definition angegeben werden, die die n-te Stelle aus n nach einer allgemeinen mathematischen Formel berechnet (wie z.B. bei der Folge der Quadratzahlen), noch kann eine rekursive Definition angegeben werden, die die n-te Stelle aus den vorangegangene Stellen berechnet (wie z.B. im Falle der Fibonacchi-Folge). Für die Dualfolge P lässt sich zwar z.B. mittels Primfaktorzerlegung mathematisch entscheiden, ob ihre n-te Stelle 0 oder 1 ist, aber man kann nicht die gesamte Folge übersehen und folglich keine allgemeinen Aussagen ableiten. Es gibt nur eine Rechenvorschrift für die Bestimmung der einzelnen Glieder der Folge, – keines für die gesamte Folge. Es lässt sich kein interner Zusammenhang der Glieder der Folge erkennen und diesem Sinne erscheint sie gesetzlos ("irrational"). Gesetzmäßige Folgen sind dadurch charakterisiert, dass ihre Glieder "direkt" berechnet werden können, d.h. ohne ein "Ausprobieren" bzw. ohne Bezug auf Ungleichungen. Gesetzmäßige Folgen sind ein spezifischer Fall von berechenbaren Folgen.

Für Untersuchungen, die Aussagen über den gesamten Prozess der rationalen Annäherung machen, ist nicht nur auf berechenbare, sondern auf gesetzmäßige Annäherungen zurückzugreifen. Die hierbei verwendeten mathematischen Formeln können im Unterschied zu finiten Gleichungen auch ∞ bzw. $\ldots$ enthalten. Nicht zugelassen sind rekursive Definitionen unter Verwendung informeller, logischer oder mengentheoretischer Ausdrücke. Rekursivität im Sinne der Rekursionstheorie ist nicht hinreichend. Es muss vielmehr möglich sein, die Folgeglieder ohne Ausprobieren durch Einsetzen in jeweilige Gleichung zu berechnen.

Wir unterscheiden drei Arten von "Epsilontitk" (Theorie der Folgen): gesetzmäßige, berechenbare und universelle (extensionale) Epsilontik. Fragen nach den Eigenschaften rationaler Bestapproximationen gegebener Zahlen betreffen nicht die Berechnung der jeweils nächsten Stelle einer Folge im Rahmen einer bestimmten Notation, sondern den gesamten Prozess der Approximation. Man muss diesen überblicken, um etwa entscheiden zu können, mit welchem Maß die Zahlen gemessen werden können. Die Entscheidbarkeit des Maßes, mit dem eine konkrete Zahl gemessen werden kann, fällt folglich in die gesetzmäßige Epsilontik. Eine universelle Epsilontik sprengt den Rahmen einer algorithmisch betriebenen Mathematik und betrachtet Folgen unabhängig von Gleichungen. Dies gilt zum Teil auch von der berechenbaren Epsilontik (vgl. das obige Beispiel der Folge P). Auch gesetzmäßige Folgen können unabhängig von Gleichungen untersucht werden. Wir betrachten im Rahmen einer algorithmischen *Zahlen*theorie aber nur gesetzmäßige Folgen, die P-Zahlen annähern und damit wesentlich mit den Gleichungen, die diese Zahlen definieren, verknüpft sind. Uns interessiert im folgenden das Mindestmaß für rationale Approximationen von P-Zahlen.

Die Gesetzmäßigkeit von Folgen ist notationsabhängig. Je nach Art der Zahlen (bzw. der Art der Gleichungen, die sie definieren) können unterschiedliche Gesetze angegeben werden, durch die die Zahlen angenähert werden können. Unterschiedliche Arten von Gesetzen erlauben unterschiedliche Probleme zu entscheiden. Für die Frage nach rationalen Bestapproximationen spielt die Annäherung der Zahlen durch Kettenbrüche ein maßgebliche Rolle.

7.5 Rationale Bestapproximation

Wir betrachten im Folgenden beste Näherungen der 2. Art für reelle Zahlen. Ein Bruch $\frac{A_m}{B_m}$ ist eine beste Näherung 2. Art für die reelle Zahl α, wenn für alle teilerfremden Brüche $\frac{A_n}{B_n}$ mit $B_n \leq B_m$ und $\frac{A_m}{B_m} \neq \frac{A_n}{B_n}$ gilt:

$$|B_m \cdot \alpha - A_m| < |B_n \cdot \alpha - A_n|$$

Wir sprechen im Weiteren nur noch kurz von (rationalen) "Bestapproximationen" oder "'besten Näherungen". Nach dem Satz von Lagrange gilt, dass jede beste Näherung 2. Art einer reellen Zahl ein Näherungsbruch ihrer regulären Kettenbruchentwicklung ist. Ein Kettenbruch hat die Form $a + \frac{b}{c+\frac{d}{e+\frac{f}{\ddots}}}$. Sind die Teilzähler $b, d, f, \ldots = 1$, ist der Kettenbruch ein regulärer. Teilzähler werden a_i, Teilnenner mit b_i abgekürzt. Eine verkürzte Schreibweise regulärer Kettenbrüche nennt neben a nur die Teilnenner b_i. Der reguläre Kettenbruch des goldenen Schnittes ($\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$) ist besonders einfach: $[1; \overline{1}]$, der reguläre Kettenbruch von $\sqrt{2}$ ist $[1; \overline{2}]$. Ist die reguläre Kettenbruchentwicklung einer reellen Zahl gegeben, ist gemäß des Satzes von Lagrange die Folge der rationalen Bestapproximationen gegeben.

Die Schnelligkeit der Bestapproximationen lässt sich mit unterschiedlichen Maßen messen. Ein Maß ist ein von B_n abhängiger Ausdruck, mit dem der Betrag von $\alpha - \frac{A_n}{B_n}$ multipliziert wird. Ergibt sich, dass die resultierende Folge divergiert, dann ist das Maß "zu schnell", um α zu messen. Ergibt sich, dass die resultierende Folge gegen 0 konvergiert, dann ist es "zu langsam", um α zu messen. Gibt es hingegen zwei Konstanten k_1, k_2 mit $0 < k_1 \leq k_2$, die die Folge begrenzt, ist das Maß angemessen. Konvergiert die resultierende Folgen gegen eine eine Konstante > 0 misst es exakt.

Für die Frage, mit welchem Maß die Bestapproximationen zu messen sind, muss die am schnellsten steigende Teilfolge der Teilnenner b_i der regulären Teilfolgen ausgewählt werden. Wenn reguläre Kettenbrüche nicht periodisch, aber gesetzmäßig sind, können diese gesetzmäßigen Kettenbrüche u.U. noch beschleunigt werden. Wir nennen das Problem, maximal beschleunigte reguläre Kettenbrüche zu finden, das *Problem der Maximalbeschleunigung.*

Nicht für jede P-Zahl kann ein gesetzmäßiger regulärer Kettenbruch aus den die P-Zahl definierenden Gleichungen generiert werden. Es ist in diesem Fall zu untersuchen, wie zugängliche gesetzmäßige Folgen zu Kettenbruchentwicklungen der P-Zahlen in Beziehung gesetzt werden können, um Fragen der rationalen Approximation entscheiden zu können. Wir nennen dies das *Problem der gesetzmäßigen Kettenbruchentwicklung.* Die Reduktion der Zahlen auf P-Zahlen führt folglich keineswegs dazu, dass die Frage nach dem Maß der P-Zahlen trivial entscheidbar ist. Sie ist auch nicht einmal nach einem einheitlichen Verfahren entscheidbar, da nicht für jede P-Zahl ein gesetzmäßiger, regulärer Kettenbruch konstruiert werden kann. Dies gilt nur für geeignete Teilsysteme der P-Zahlen, z.B. quadratische Irrationalzahlen.

7.6 Khintschins Theorem

Khintschins Theorem, in der schwachen Variante, die wir zu Grunde legen, verwendet als Maß $B_n^2 \cdot Ln(B_n)$. Die reguläre Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{2}$ ist $1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\ddots}}}$ bzw. gemäß der gewöhnlichen Schreibweise regulärer Kettenbrüche $[1; 2, 2, 2, \ldots]$. Folglich ist die Folge der Hauptnäherungsbrüche $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \ldots$. Anwendung von Khintschins Maß ergibt in Dezimalnotation $0, 0.238, 0.572, 0.878, \ldots$. In Frage steht, ob diese Folge divergiert. Wie sich zeigen lässt, ist dies der Fall. Folglich kann $\sqrt{2}$ nicht mit Khintschins Maß gemessen werden: Dieses ist zu schnell für $\sqrt{2}$. Die reguläre Kettenbruchentwicklung von π beginnt mit $[3; 7, 15, 1, \ldots]$. Die Folge der Hauptnäherungsbrüche beginnt folglich mit $3, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \ldots$. Anwendung von Khintschins Maß ergibt: $0, 0.121, 4.361, 0.016, \ldots$. Da anders als im Fall von $\sqrt{2}$ die reguläre Kettenbruchentwicklung keinem erkennbaren Gesetz folgt, kann nicht entschieden werden, ob π mit Khintschins Maß gemessen werden kann.

Der Satz von Thue-Siegel-Roth verwendet das Maß $B_n^{2+\epsilon}$ und besagt, dass dieses Maß für alle algebraischen Zahlen zu schnell ist. Auch der Beweis dieses Satzes ist nicht konstruktiv. Es werden hypothetisch gute Lösungen angenommen und keine Näherungsfolgen konstruiert. Bis heute offen ist eine Vermutung von Serge Lang, die besagt, dass das Maß im Satz von Thue-Siegel-Roth auf $B_n^2 \cdot Ln(B_n^{1+\epsilon})$ verschärft werden kann. Lang hat diese Vermutung sogar für alle seine "classical numbers" geltend gemacht. Wir kommen auf S. 47 darauf zurück.

Khintschins Maß ist hingegen noch langsamer als $B_n^2 \cdot Ln(B_n^{1+\epsilon})$ und es konnte bislang nicht entschieden werden, ob algebraische Zahlen es im Allgemeinen erfüllen. Khintschins Theorem bezieht sich ganz allgemein auf reelle Zahlen α und besagt, dass für "fast alle" reelle Zahlen α Khintschins Maß ein Mindestmaß darstellt, während das Maß $B_n^2 \cdot Ln(B_n^{1+\epsilon})$ für diese Zahlen α zu schnell ist.

Khintschins Theorem lässt sich noch dahingehend verschärfen, dass $\sqrt[n]{B_n}$ für fast alle reellen Zahlen gegen Khintschins Konstante konvergiert. Wir betrachten im Weiteren nur die schwächere Version von Khintschins Theorem.

Der Beweis von Khintschins Theorem (siehe Khintschin (1963, 65,69)) ist nicht konstruktiv und wird über die wahrscheinliche Verteilung natürlicher Zahlen in der Kettenbruchentwicklung von Zufallsfolgen geführt. Er greift auf die Dichtefunktion für die durchschnittliche Verteilung natürlicher Zahlen im Teilnenner der regulären Kettenbrüche von Zufallsfolgen zurück:

$$\frac{1}{Ln(2)} \int\limits_{1/(k+1)}^{1/k} \frac{dx}{1+x} = \frac{1}{Ln(2)}(Ln(\frac{k+1}{k}) - Ln(\frac{k+2}{k+1})), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Verwendet man b_i als Bezeichnung der Teilnenner in Kettenbrüchen und drückt die Dichtefunktion graphisch aus, erhält man Abbildung 1.

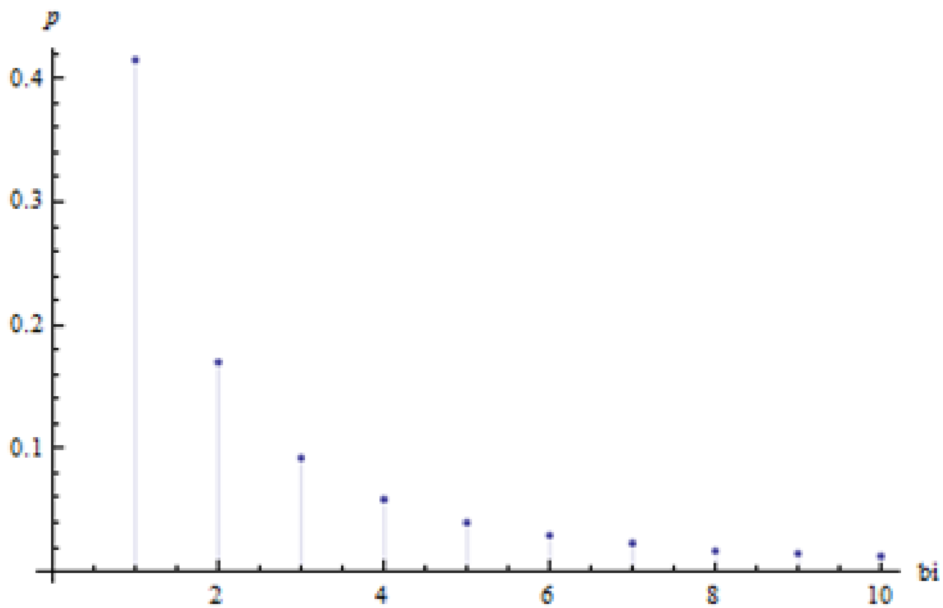

Abbildung 1: Dichtefunktion für die Verteilung der Teilnenner b_i

Diese Funktion beruht auf stochastischen Überlegungen. Sie sagt nur etwas über die Wahrscheinlichkeit p des Vorkommens der b_i in der regulären Kettenbruchentwicklung beliebiger Zahlen aus. Sie sagt aber nichts über die konkrete Abfolge der b_i für konkrete Zahlen aus.

Dass Khintschins Theorem für "fast alle" reellen Zahlen gilt, besagt, dass die Menge der Zahlen, die das Theorem erfüllt, volles Lebesgue-Maß hat. Damit bleibt aber immer noch eine überabzählbare Lebesgue-Nullmenge an Zahlen, die das Theorem nicht erfüllt. Im Allgemeinen ist nicht bekannt, welche Zahlen Khintschins Theorem erfüllen bzw. nicht erfüllen. Es kann sogar keine einzige konkrete Zahl genannt werden, die nachweislich Khintschins Theorem erfüllt. Das Theorem besagt nur ganz allgemein, dass verschwindend wenige der reellen Zahlen es nicht erfüllen. Da die reellen Zahlen aber selbst überabzählbar sind und beliebige Zufallsfolgen enthalten, können hieraus keine konkreten Folgerungen gezogen werden. Dass die überabzählbare Lebesgue-Nullmenge an Zahlen, die Khintschins Theorem nicht erfüllen, nicht unter Kontrolle ist, zeigt die Tatsache, dass alle Fälle, für die sich entscheiden lässt, ob sie Khintschins Theorem erfüllen, in ihr vorkommen. Hierunter fallen:

zu schnell: rationale Zahlen, quadratische Irrationalzahlen, Zahlen mit Hurwitzschen Kettenbrüchen wie die Euler-Zahl e

zu langsam: Liouville-Zahlen.

Offen ist, ob algebraische Zahlen vom Grade > 2 mit Khintschins Maß messbar sind; ebenfalls offen ist, ob π mit Khintschins Maß messbar ist.

7.7 Eine alternative Vermutung

Wir skizzieren zunächst einige Ergebnisse und Überlegungen zu Teilbereichen der P-Zahlen, in denen mit vergleichsweise einfachen Mitteln entschieden werden kann, mit welchem Maß sie bzw. ob sie mit Khintschins Maß gemessen werden können. Unsere folgenden Überlegungen zur Entscheidung der Frage für das Maß der P-Zahlen unterscheiden folgende Spezialfälle:

1. quadratische Irrationalzahlen (z.B. $\sqrt{2}$),
2. Zahlen der Form $e^{\frac{1}{n}}$ (z.B. e),
3. Zahlen aus DGL über rationalen Funktionen (z.B. π),
4. algebraische Zahlen aus Gleichungen mit Grad > 2 (z.B. $\sqrt[3]{2}$),

Quadratische Irrationalzahlen (z.B. $\sqrt{2}$). Diese sind alle mit periodischen regulären Kettenbrüchen approximierbar. Da die Kettenbrüche periodisch sind, sind sie maximalbeschleunigt. Es ist bekannt und kann leicht bewiesen werden, dass sie mit dem Maß B_n^2 exakt gemessen werden können. Folglich ist für sie nachweislich Khintschins Maß zu schnell.

Zahlen der Form $e^{\frac{1}{n}}$ (z.B. e). Diese Zahlen sind alle durch gesetzmäßige, reguläre Kettenbrüche approximierbar. Der reguläre Kettenbruch von e ist z.B. $[2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, ...]$. Dieser ist nicht periodisch und kann noch maximal beschleunigt werden. *Das Problem der Maximalbeschleunigung* (s.S. 41) kann nach folgendem Verfahren, ausgehend von finiten Gleichungen, gelöst werden:

$y' = y$

$\Rightarrow$ Potenzreihenansatz: $Exp(z) = \sum \frac{z^n}{n!}$

$\Rightarrow$ QD Algorithmus: $Exp(z) = \frac{1|}{|1} - \frac{1 \cdot z|}{|1} + \frac{\frac{z}{2}|}{|1} - \frac{\frac{z}{6}|}{|1} + \dots$

$\Rightarrow$ Beseitigung der Nenner: $Exp(z) = \frac{1|}{|1} - \frac{z|}{|1} + \frac{z|}{|2} - \frac{z|}{|3} + \frac{z|}{|2} - \frac{z|}{|5} + \frac{z|}{|2} \dots$

$\Rightarrow$ Kontraktion auf den Odd-Part: $Exp(z) = 1 + \frac{2 \cdot z|}{|2-z} + \frac{2 \cdot z \cdot z|}{|4 \cdot 3} + \frac{4 \cdot z \cdot z|}{|4 \cdot 5} + \frac{4 \cdot z \cdot z|}{|4 \cdot 7} \dots$

$\Rightarrow$ Umformung: $Exp(z) = 1 + \frac{2 \cdot z|}{|2-z} + \frac{z \cdot z|}{|2 \cdot 3} + \frac{z \cdot z|}{|2 \cdot 5} + \frac{z \cdot z|}{|2 \cdot 7} \dots$

$\Rightarrow$ Mit $z = \frac{n}{m}$: $Exp(z) = 1 + \frac{2 \cdot n|}{|2 \cdot m - n} + \frac{n^2|}{|2 \cdot 3 \cdot m} + \frac{n^2|}{|2 \cdot 5 \cdot m} + \frac{n^2|}{|2 \cdot 7 \cdot m} \dots$

$\Rightarrow$ Mit $z = 1$: $Exp(1) = 1 + \frac{2|}{|1} + \frac{1|}{|6} + \frac{1|}{|10} + \frac{1|}{|14} + \dots$

$\Rightarrow$ $Ln(B_n) \cdot B_n^2$ zu schnell.

Zahlen aus DGL über rationalen Funktionen (z.B. π). Hier ist kein allgemeines Verfahren bekannt, nach dem gesetzmäßige *reguläre* Kettenbrüche generiert werden können. Um das *Problem der gesetzmäßigen Kettenbruchentwicklung* (s.S. 41) für diesen sowie auch allen weiteren Fällen von P-Zahlen, für die sich dieses Problem stellt, zu lösen, schlagen wir vor, stattdessen gesetzmäßige, *positive, irreguläre* Kettenbrüche zu untersuchen, d.i. Kettenbrüche, deren Teilzähler positive ganze Zahlen sind. Diese lassen sich in der Form $a_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \dots$ schreiben. Diese kommen gesetzmäßigen regulären Kettenbrüchen am nächsten. Wir nennen das Produkt der positiven Teilzähler das Maß "der Schärfe" der Messung. Es gibt an, in welchen Bereichen der Nenner B_n die approximierte Zahl α liegt. Reguläre Kettenbrüche messen maximal scharf, während die Messung basierend auf positiven, irregulären Kettenbrüchen nicht scharf ist. Aber gesetzmäßige Folgen irregulärer, positiver Kettenbrüche können immerhin konstruiert und ihr Maß gemessen werden. Es ist die beste Alternative, die man in Ermangelung gesetzmäßiger, regulärer Kettenbrüche hat und somit der einzige Weg, auf dem man im Rahmen einer algorithmischen Zahlentheorie weiter kommen kann. Nach dieser hängt die Entscheidbarkeit mathematischer Probleme maßgeblich von der Möglichkeit repräsentativer Darstellungsformen ab; bevor Probleme gar nicht gelöst werden, sind sie auf entsprechende Notationen zu relativieren.

Ein Verfahren zur Konstruktion positiver, gesetzmäßiger Kettenbrüche aus dem DGL-Rahmen und der Messung ihrer Geschwindigkeit ist das folgende:

$y' = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$

$y' = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, $P(x,y)$ und $Q(x,y)$: Polynome mit rationalen Koeffizienten

$\Rightarrow$ Potenzreihenansatz: System von rein rationalen Rekursionsgleichungen für die Koeffizienten der Potenzreihe

$\Rightarrow$ QD Algorithmus von Rutishauser (1954)

$\Rightarrow$ Rein rationale Rechnungen für die a_n und b_n

$\Rightarrow$ C-Kettenbruch

$\Rightarrow$ Kettenbruchkontraktion, so dass alle a_n und b_n positiv sind.

$\Rightarrow$ Kettenbruchäquivalenz, um die Nenner der a_n und b_n weg zu transformieren.

$\Rightarrow$ Kettenbruchäquivalenz, um die gemeinsamen Faktoren der a_n und b_n zu kürzen.

$\Rightarrow$ Geschwindigkeitsmessung und Beweis, dass $Ln(B_n) \cdot B_n^2 \cdot$ zu schnell ist.

Auf diese Weise erhält man z.B. über $ArcTan(1) = \frac{\pi}{4}$ für π den gesetzmäßigen, irregulären, positiven und maximalbeschleunigten Kettenbruch $\frac{4|}{|1} + \frac{1^2|}{|3} + \frac{2^2|}{|5} + \frac{3^2|}{|7} + \frac{4^2|}{|9} + \ldots$, vgl. hierzu Jones/Thron (1980, 202). Für diesen kann gezeigt werden, dass das Khintschin Maß zu schnell ist; sogar B_n^2 ist in diesem Fall zu schnell. Da diese Messung sich nicht auf einen regulären Kettenbruch bezieht, kann damit nicht auf Bestapproximation geschlossen werden. Die Messung hängt ab vom gewählten Konstruktionsrahmen. Aber relativ zu diesem können Sätze bewiesen und gezeigt werden, dass zumindest für diese gesetzmäßige Konstruktion Khintschin Maß zu schnell ist.

Gesetzmäßige Kettenbrüche für transzendente Zahlen lassen sich auch auf andere Weise gewinnen, z.B. über Streckenmessungen (Polygonzüge), Flächenmessungen (Riemannsummenintegral) oder hypergeometrische DGL (z.B. für ArcTan, General Polynomial, Exp, Ln), vgl. hierzu Jones/Thron (1980). Es konnte auf diesem Weg noch kein Maß gefunden werden, das an Khintschins Maß herankommt. Es kann eine "langsame Seite" (z.B. über Funktionen wie ArcTan, Ln), für die selbst B_n^2 zu schnell ist, und eine "schnelle Seite" (z.B. über Funktionen wie Tan, Exp) unterschieden werden, – aber auch die schnelle Seite reicht nicht an Khintschines Maß. Dies hat die klassische Mathematik im Rahmen der Funktionentheorie sehr genau untersucht, könnte aber unserer Meinung nach auch zahlentheoretisch in Bezug auf rationale Approximierbarkeit näher untersucht werden.

Algebraische Zahlen aus Gleichungen mit Grad > 2 (z.B. $\sqrt[3]{2}$) Das Newton Verfahren liefert zwar gesetzmäßige Folgen, kann aber nicht in positive Kettenbrüche umgeformt werden, da es nicht alternierende, sondern nur monotone Folgen generiert. Bombieri & van der Poorten (1975) geben zwar eine Rekursionsformel an, um gesetzmäßige, reguläre Kettenbrüche zu generieren, aber es ist nicht klar, ob diese maximalbeschleunigt sind, die gesetzmäßigen Folgen sind mit der Floor-Funktion definiert und die Art des Gesetzes lässt keine weiteren Rückschlüsse auf das Maß der Geschwindigkeit zu.[16] Nach dem Satz von Thue Siegel Roth ist $B_n^{2+\epsilon}$ zu schnell, die Vermutung von Lange verschärft dies auf $B_n^2 \cdot Ln(B_n^{1+\epsilon})$. In Frage steht, ob selbst Khintschins Maß zu schnell ist, womit alle algebraische Zahlen zur Nullmenge gemäß Khintschins Theorem gehörten. Beweise stehen hier aus. Nach unserem Verständnis ist es eine wesentliche Aufgabe einer algorithmischen Zahlentheorie, Verfahren zu entwickeln, die aus algebraischen Gleichungen gesetzmäßige Folgen entwickeln, die ermöglichen, Sätze über das Maß der rationalen Approximationen abzuleiten. Wie im Fall der Zahlen aus den DGL über rationalen Funktionen kommen hier insbesondere positive, irreguläre Kettenbrüche zur Lösung des *Problems der gesetzmäßigen Kettenbruchentwicklung* in Frage. Man erhält z.B. über die Aufstellung einer direkten, alternierenden Rekursion, s. S. 51 gesetzmäßige, irreguläre positive Kettenbrüche. Eine alternative Konstruktion für bestimmte algebraische Zahlen geht über DGL und general polynomial. Für diesen Fall erhält man für $\sqrt[3]{2}$ den gesetzmäßigen, irregulären, positiven Kettenbruch $1 + \frac{1|}{|3} + \frac{3 \cdot 2|}{|2 \cdot 3} + \frac{3 \cdot 4|}{|3 \cdot 3} + \ldots$, vgl. Jones/Thron (1980, 202). Für diese Fälle kann wiederum gezeigt werden, dass Khintschins Maß zu schnell ist. Andere Konstruktionsverfahren sind möglich. Auch hier konnte bislang keine Konstruktion gefunden werden, die mit Khintschins Maß gemessen werden kann. Dies müsste durch eine systematische Untersuchung der unterschiedlichen Konstruktionsrahmen und der mit ihnen verbundenen Maße weiter überprüft werden.

Unsere Ergebnisse und Überlegungen legen folgende Vermutung nahe:

[16] Vgl. Bombieri & van der Poorten (1975, 152) bemerken selbst:

> Thus, contrary to received wisdom, there may well be 'a formula' for the continued fraction expansion of an algebraic number of degree greater than 2. However, such a formula does not necessarily usefully increase our understanding of the nature of the partial quotients of such a number.

Vermutung: Khintschins Maß ist für alle gesetzmäßigen Folgen von P-Zahlen zu schnell.

Salopp gesprochen, könnte man sagen: Gesetzmäßige Konstruktion aus einer genuin mathematischen Herkunft hat ihren Preis gegenüber dem Zufall. Anders als Khintschins Theorem ist der Gegenstandsbereich unsere Vermutung mit den P-Zahlen viel kleiner und gilt nicht absolut, sondern nur relativ zur Konstruktion gesetzmäßiger Folgen. Nach unserem Verständnis sind Theoreme in Form genereller, konstruktionsabhängiger Aussagen, die für alle einzelne Instanzen nachweislich gelten, konstruktionsunabhängigen Theoremen vorzuziehen, deren allgemeine Gültigkeit für keine konkrete, bekannte Zahl nachgewiesen werden kann. Es kommt darauf an, worüber man quantifizieren will, wenn man generelle Aussagen tätigt. Unsere Vermutung ist immerhin widerlegbar, indem ein konkretes Gegenbeispiel konstruiert wird, während Khintschins Theorem immun gegenüber jeglicher Gegeninstanz ist und sogar aufrecht erhalten wird, obwohl keine einzige bekannte, nachweisliche Zahl genannt werden kann, die mit Khintschins Maß gemessen werden kann. Wo der Verfechter von Khintschins Theorem eine Allgemeinheit preist, die über jede konkrete Instanz erhaben ist, fürchten wir um den relevanten mathematischen Gehalt derartig allgemeiner Theoreme. Wo wir Entscheidbarkeit und praktische Relevanz preisen, mag unser Kritiker eine Mathematik beargwöhnen, die sich nicht über die Niederungen und engen Schranken dessen, was berechenbar ist, zu den eigentlichen Höhen abstrakter Mathematik erhebt. Was des einen Paradies ist, ist des anderen Hölle.

Lang (1971, 661) hat vermutet, dass das Maß $B_n^2 \cdot Ln(B_n^{1+\epsilon})$ für seine "classical numbers" zu schnell ist. Wir beschränken unsere Vermutung auf P-Zahlen, die noch enger definiert sind als Langs classical numbers und verschärfen sie zu der Vermutung, dass für diese Zahlen auch Khintschins Maß zu schnell ist.

Wir können unsere Vermutung nicht für alle Konstruktionsmöglichkeiten aller P-Zahlen beweisen. Unsere Vermutung im Allgemeinen zu prüfen oder gar zu beweisen, stellt nach unserem Verständnis eine zentrale und tiefgehende Herausforderung an eine algorithmisch orientierte Zahlentheorie dar. Wir schlagen zunächst folgendes allgemeine Verfahren vor, um unsere Vermutung in Bezug für irreguläre, positive Kettenbrüche zu bestätigen:

1. Finite Gleichung
2. Konstruktion einer gesetzmäßigen, konvergenten Folge.
3. Transformation in einen gesetzmäßigen, irregulären, positiven Kettenbruch.

4. Messung und Beweis, dass Khintschins Maß zu schnell ist.

Wir lassen aber offen, inwieweit dieses Verfahren und unsere Vermutung verallgemeinert werden kann oder präzisiert werden muss, um einen eindeutig entscheidbaren Gehalt zu haben. Die Grenzen sowohl für "alle" P-Zahlen als auch "alle" gesetzmäßigen Folgen sind variabel. Für die Definition mathematisch relevanter Probleme erscheint es uns wichtig, diese so zu formulieren, dass sie entscheidbar sind und ihre Lösung nachweislich für den Kernbereich mathematischer Zahlen geltend gemacht werden kann. Nach unserem Verständnis erhalten Theoreme nicht Bedeutung, indem sie möglichst allgemein sind, sondern dadurch, dass sie für einen präzise definierten Bereich für jede einzelne Instanz entscheidbar sind. Nur unter dieser Voraussetzung sind möglichst allgemeine Theoreme zu beweisen.

Unsere Überlegungen beanspruchen keine mathematische Expertise. Sie wollen vielmehr aufzeigen, welche Fragen sich einer algorithmisch betriebenen Mathematik stellen und mit welcher Methode diese angegangen werden können. Wir hoffen, dass es fachkundigen Kettenbruchtheoretiker gelingt, unsere speziellen Überlegungen zu verallgemeinern. Unser Ziel ist es, mathematische Untersuchungen anzuregen, die unsere Vermutung prüfen, dass gesetzmäßige Konstruktionen von Folgen für konkrete und bekannte Zahlen, die über Gleichungen definiert werden, und die – anders als Zufallszahlen – den genuinen Bereich der Mathematik ausmachen, mit Khintschins Maß nicht gemessen werden können. Dies soll als ein Beispiel dafür dienen, dass es letztlich Forschungsprogramme sind, die bestimmen, welche Art von Problemen relevant sind und welche Art von Theoremen Anerkennung genießen.

Unser Ziel ist es, die Arbeit an einer algorithmisch betriebenen Mathematik anzuregen und vor Augen zu führen, dass aus ihrem Blickwinkel ein Theorem wie das Khintschins für den genuinen Bereich der Mathematik keine Bedeutung hat. Unsere Vermutung steht – anders als Wittgensteins Vermutung der Entscheidbarkeit von FOL – nicht in explizitem Widerspruch zu Khintschins Theorem, zeigt aber deutlich den diametral entgegengesetzten Fokus auf mathematische Probleme und die daraus resultierenden unterschiedlichen Vermutungen / Theoreme in einer algorithmischen und einer axiomatischen Mathematik.

Selbst algorithmisch orientierte Mathematiker wie Bombieri und van der Porten, Waldschmidt oder Lang meinen, aus Khintschins Theorem auf P-Zahlen (in diesem Fall algebraische Zahlen) schließen zu können. Bombieri & van der Poorten (1975, 141):

> There is no reason to believe that the continued fraction expansions of nonquadratic algebraic irrationals generally do any-

thing other than to faithfully follow Khintchine's Law as detailed below.

Waldschmidt (2008, 73):

> A guide to state conjectures is to consider which properties are valid for almost all numbers, which means outside a set of Lebesgue measure 0, and to expect that algebraic numbers will share these properties.

Lang (1971, 1):

> One general idea is that algebraic numbers will exhibit a behvior that is the same as almost all numbers in a probabilistic sense, except under very specific structural conditions, namely quadratic numbers.

Nach unserer Auffassung ist es ein Fehlschluss, Khintschins Theorem auf algebraische Zahlen zu übertragen. Es wird fälschlicherweise aus dem unbeschränkten Reich des Zufalls auf das beschränkte Reich der Gesetzmäßigkeit geschlossen. Eine algorithmische Mathematik untersucht die Eigenheiten einer gesetzmäßigen Welt und überlässt alles andere dem Zufall.

Anhang: Transzendenzvermutung

Es wäre interessant, die lange bekannte und noch offene Verschärferung des Satzes von Thue-Siegel-Roth, dass jede schneller als mit B_n^2 rational approximierbare Zahl transzendent ist , im Rahmen einer algorithmischen Zahlentheorie in folgender Form zu untersuchen:

Transzendenzvermutung: Wenn eine P-Zahl schneller als B_n^2 rational gesetzmäßig approximierbar ist, dann ist die P-Zahl transzendent.

Analog zu unserer Alternative zu Khintschins Theorem schwebt uns vor, diese Vermutung für den Konstruktionsrahmen gesetzmäßiger, positiver, irregulärer Kettenbrüche zu beweisen. Die folgende Beweisskizze für einen bestimmten Konstruktionsrahmen stammt von Karsten Müller:

Hilfssatz 1: Sei f streng monoton fallend, $x_{n+1} = f(x_n)$ und $0 < c <| f' |< q < 1$ auf dem gesamten Bereich, aus dem auch der Startwert kommt, dann konvergieren die Invarianten gegen $\frac{1}{1-|f'(x_F)|} \cdot \frac{|f'(x_F)|}{1-|f'(x_F)|} > 0,$, wobei x_F der eindeutig bestimmte Fixpunkt ist.

Hilfssatz 2: Es liegt ein positiver gesetzmäßiger irregulärer Kettenbruch vor. Seine Invarianten $(\frac{a_n}{b_n \cdot b_{n+1}})$ sind beschränkt und von Null weg beschränkt. Dann ist seine rationale Approximationsgeschwindigkeit nicht schneller als B_n^2.

Diese beiden Hilfsätze lassen sich beweisen. Unter dieser Voraussetzung kann nach folgendem Verfahren die Transzendenzvermutung für den Konstruktionsrahmen positiver, gesetzmäßiger, irregulärer Kettenbrüche bewiesen werden:

Gegeben ist eine algebraische Gleichung $P(x) = 0$ mit einem rationalen Polynom P.

$\Rightarrow$ Konstruktion einer konvergenten, alternierenden Rekursion.

$\Rightarrow$ Transformation in einen gesetzmäßigen, positiven irregulären Kettenbruch.

$\Rightarrow$ Mit Hilfssatz 1: Die Invarianten $(\frac{a_n}{b_n \cdot b_{n-1}})$ konvergieren und sind von 0 weg beschränkt.

$\Rightarrow$ Mit Hilfssatz 2: Die Geschwindigkeit ist nicht schneller als B_n^2.

$\Rightarrow$ Die Transzendenzvermutung gilt für diesen Konstruktionsrahmen.

Danksagung

Wir danken Michael Taktikos für Computerberechnungen, Unterstützung bei der Programmierung und Quellenhinweise. Ingo Althöfer, Gregor Nickel und ihren mathematischen Kolloquia sowie Markus Säbel danken wir für Diskussionen von Teilen dieses Papers.

Literatur

Börger, E., Grädel, E. & Gurevich, Y. (2001): *The Classical Decision Problem*, Springer.

Bombieri, E. & and van der Poorten, A. (1975): “Continued Fractions of Algebraic Numbers”, in: Baker (Hrsg.), *Transcendental Number Theory*, Cambridge University Press, 137-155.

Boolos, G. S., J. P. Burgess and R. C. Jeffrey (2003). *Computability and Logic*, 4th edition. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Etchemendy, J. (1990): *The Concept of Logical Consequence*, Harvard University Press: Cambridge/Mass.

Frege, G.: “Funktion und Begriff”, in: Patzig (Hrsg.), *Funktion, Begriff, Bedeutung*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1994 (Erstpublikation 1891), 18-39.

Hardy, G.H. (2008): *An Introduction to the Theory of Numbers* Oxford University Press: Oxford.

Hilbert, D. & Bernays, P. (1968): *Grundlagen der Mathematik*, Band 1, Berlin, Heidelberg, New York: Springer.

Khintschin, A.I.: *Continued Fractions*, Noordhoff: Groningen 1963.

Kvasz, L. (2008): *Patterns of Change, Linguistic Innovations in the Development of Classical Mathematics*, Birkhäuser: Basel.

Jones, W.B. and Thron, W.J. (1980): *Continued Fractions: Analytic Theory and Applications*, Cambridge University Press: Cambridge.

Kreisel, G. (1987): “Church’s Thesis and the Ideal of Informal Rigour”, *The Notre Dame Journal of Formal Logic* 4, 499-519.

Lang, S.: “Transcendental numbers and diophantine approximations”, *Bulletin of the American Mathematical Society* 77.5 (1971), 635-677.

Lang, S. (1995): *Introduction to Diophantine Approximation*, Springer: New York.

Neumann, Johann von (1927): “Zur Hilbertschen Beweistheorie”. *Mathematische Zeitschrift* 26, 1-46.

Quine, W. V. O. (1960): *Word and Object*. Cambridge, MA: MIT Press.

Rutishauser, H.: “Der Quotienten-Differenzen-Algorithmus”, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik* 5.3, 233-251.

Turing, A. (1936): “On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem”, *Proceedings of the London Mathematical Society* 2(42): 230-65.

Waldschmidt, M. (2006): “Transcendence of Periods: The State of the Art”, *Pure and Applied Mathematics Quarterly* 2.2, (Special Issue: In honor of John H. Coates), 435-463, 2006.

, Waldschmidt, M. (2008): “Introduction to Diophantine methods irrationality and trancendence”, http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc.

Wittgenstein, L. (1984): *Tractatus logico-philosophicus*, Frankfurt: Suhrkamp (Werkausgabe Band 1)

Wittgenstein, L. (1991): *Philosophische Bemerkungen*, Frankfurt: Suhrkamp (Werkausgabe Band 2).

Wittgenstein, L. (1991): *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*. Frankfurt: Suhrkamp (Werkausgabe Band 6).

Wittgenstein, L. (1984): *Philosophische Untersuchungen*, Frankfurt: Suhrkamp (Werkausgabe Band 1).

Wittgenstein, L. (1994): *Philosophische Betrachtungen* (MS 107), Wien: Springer (Wiener Ausgabe Band 2).