Finitistische Aussagenlogik

VL: Finitismus

PD Dr. Timm Lampert

Humboldt Universität Berlin

Aussagenlogik AL

- φ: Formeln mit Satzvariablen $P, Q, R, P_1, P_2, \ldots$ sowie Junktoren (logischen Operationszeichen) $\neg$, $\wedge, \vee, \rightarrow$, $\leftrightarrow$, z.B.:

$$(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$$

- AL_{mL}: logische Gültigkeit von φ semantisch entscheidbar (Wahrheitwerttabellen) und in einem korrekten und vollständigen Kalkül beweisbar.
- AL_F: φ kann stets durch reine Äquivalenzumformung in ein ideales Symbol φ^* umgeformt werden. Hierdurch werden logische Eigenschaften entschieden.

Bedeutung von AL

- Für die mathematische Logik (mL) ist AL im Gegensatz zu FOL kaum von Bedeutung, da mathematische Aussagen nicht in AL formalisiert werden können. Nur insofern AL ein Teil von FOL ist, ist AL von Bedeutung.
- Im Finitismus (F) ist AL ein autonomes und abgeschlossenes System der logischen Operationen. Die Bedeutung von AL besteht in der algorithmischen Analyse der logischen Operationen.

$\Longrightarrow$ Maßstab Ausdruckskraft vs. Maßstab algorithmische Analyse

$AL_{mL}1$: Semantik

$$
\begin{array}{lcl}
\Im \models A & := & \Im(A) = \mathrm{W}, \\
\Im \not\models A & := & \Im(A) = \mathrm{F}, \\
\Im \models \neg A & := & \Im(A) = \mathrm{F}, \\
\Im \models A \wedge B & := & \Im(A) = \mathrm{W} \text{ und } \Im(B) = \mathrm{W}, \\
\Im \models A \vee B & := & \Im(A) = \mathrm{W} \text{ oder } \Im(B) = \mathrm{W}, \\
\Im \models A \rightarrow B & := & \text{wenn } \Im(A) = \mathrm{W}, \text{ dann } \Im(B) = \mathrm{W}.
\end{array}
$$

A ist logisch gültig $:= \forall\Im\ \Im \models A$

Tarski

Tarski (1956), S. 419: „In the extreme case we could regard all terms of the language as logical. The concept of formal consequence would then coincide with material consequence. The sentence S would in this case follow from the class K of sentences if either S were true or at least one sentence of the class K were false.“

⇒„Formale“ Schlüssigkeit abhängig von Unterscheidung konstanter und variabler Terme

⇒ Logische Wahrheit ⇒ materiale Wahrheit

⇒ Formale Eigenschaften ⇒ materiale Eigenschaften.

Tarskis Fallacy

„It seems to me that everyone who understands the content of [my] definition must admit that it agrees quite well with ordinary usage. […] In particular, it can be proved, on the basis of this definition, that every consequence S of true sentences K must be true, […]“

Fallacy:

$$\Box: \ (\models K \to S) \to (K \to S).$$

$$\Rightarrow ?: (\models K \to S) \ \to \Box \, (K \to S).$$

Allgemeingültigkeit

S: $<A, \mathfrak{I}(A)>$

E_{MT}: S ist logisch wahr gdw. $\forall \mathfrak{I} \, (\mathfrak{I} \models A)$.

Es gilt nicht:

Wenn ein allquantifizierter Satz *wahr* ist, dann sind seine Instanzen *notwendigerweise* wahr.

TLP 6.1231: „Das Anzeichen des logischen Satzes ist nicht die Allgemeingültigkeit. Allgemein sein heißt ja nur: zufälligerweise für alle Dinge gelten. Ein unverallgemeinerter Satz kann ebenso tautologisch sein als ein verallgemeinerter.“

Entscheidbarkeit

	P	Q	(P	∧	¬	P)	→	Q
$\mathfrak{I}1$	W	W		F	F		**W**	
$\mathfrak{I}2$	W	F		F	F		**W**	
$\mathfrak{I}3$	F	W		F	W		**W**	
$\mathfrak{I}4$	F	F		F	W		**W**	

$AL_{mL}2$: Syntax

Freges Axiomensystem:

Ax1: $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

Ax2: $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

Ax4: $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$

Regel: SUB, MPP

Nr.	**Formel**	**Regel**
(1)	$(P \rightarrow ((P \rightarrow P) \rightarrow P) \rightarrow ((P \rightarrow (P \rightarrow P)) \rightarrow (P \rightarrow P))$	SUB: Ax2
(2)	$(P \rightarrow ((P \rightarrow P) \rightarrow P)$	SUB: Ax1
(3)	$((P \rightarrow (P \rightarrow P)) \rightarrow (P \rightarrow P))$	2,1 MPP
(4)	$P \rightarrow (P \rightarrow P)$	SUB: Ax1
(5)	$P \rightarrow P$	4,3 MPP

$AL_{mL}3$: Metalogik

- $\vdash \phi$ gdw. $\models \phi$:
  1. $\vdash \phi \Rightarrow \models \phi$: Axiome und charakteristische Konditionale der Kalkülregeln sind allgemeingültig;
  2. $\models \phi \Rightarrow \vdash \phi$: Übersetzung einer allgemeingültigen Wahrheitswerttabelle in einen Beweis
- $\models \phi$ ist entscheidbar:
  1. $\mathfrak{I}(P) = W \Rightarrow G(P)=0$; $\mathfrak{I}(P) = F \Rightarrow G(P)= S0$ …
  2. $\mathfrak{I}(\neg P) \Rightarrow \overline{sg}(G(P))$ mit $\overline{sg}(0) = S0$; $\overline{sg}(n) = 0$
  3. $\mathfrak{I}(P \vee Q) \Rightarrow G(P) \times G(Q)$, …

AL_F: Grundidee

$$\varphi \Rightarrow_{\text{Def.}} \varphi^*$$

φ = Formel (= Anweisung zur Konstruktion einer logischen Form)

φ^* = eindeutiger Repräsentant logisch äquivalenter Formeln
(= Repräsentant einer logische Form)

Identifikation logischer Eigenschaften anhand von φ^*

- keine extensionale Semantik
- keine axiomatischen Beweise
- keine Metalogik

Bipolarität 1

$$P \Rightarrow_{\text{Def.}} a\text{-}P\text{-}b$$

- Bipolarität ist die äußere Eigenschaft der ab-Symbole, die "logische Unentscheidbarkeit" repräsentiert.
- Tautologien entstehen erst in Folge der logischen Verknüpfung atomarer Ausdrücke.
- Basis logischer Operationen sind bipolare Strukturen, nicht Sätze, Satzschemata oder Wahrheitswerte.

Negation

$$P \Rightarrow_{\text{Def.}} \text{a-P-b}$$

$$\neg P \Rightarrow_{\text{Def.}} \text{b-a-P-b-a} \Rightarrow_{\text{Def.}} \text{b-P-a}$$

$$\neg\neg\, P \Rightarrow_{\text{Def.}} \text{a-b-a-P-b-a-b} \Rightarrow_{\text{Def.}} \text{a-P-b}$$

NL: "If p = not–not–p etc.; this shows that the traditional method of symbolism is wrong, since it allows a plurality of symbols with the same sense; and thence it follows that, in *analyzing such propositions*, we must not be guided by Russell's method of symbolizing."

Bipolarität 2

- Um einen Sinn ausdrücken zu können, müssen Sätze eine Struktur haben, die es möglich macht, Bedingungen der Wahrheit und der Falschheit von Sätzen unterscheiden zu können.

  a-P-b vs. b-P-a

- Form der „Interpretation“:

	+	-
„a“ links von „P“	„¬¬P“ wahr, wenn P.	„¬P“ nicht wahr, wenn P.
„a“ rechts von „P“	„¬P“ wahr, wenn nicht P.	„¬¬P“ nicht wahr, wenn nicht P.

- Nur durch diese Interpretation können symmetrische Strukturen unterschieden werden:

  $\Rightarrow$ a steht für Möglichkeit der Wahrheit, b für die der Falschheit.

- In PL wird Bipolarität wie in der normalen Wortsprache durch syntaktische Regeln ausgedrückt. Dies ist gleichwertig, aber missverständlich.

ab-Operationen

	¬
a	b
b	a

	∨
aa	a
ab	a
ba	a
bb	b

	∧
aa	a
ab	b
ba	b
bb	b

	|
aa	a
ab	a
ba	a
bb	b

	→
aa	a
ab	b
ba	a
bb	a

	←
aa	a
ab	a
ba	b
bb	a

	↔
aa	a
ab	b
ba	b
bb	a

Anwendung

$\neg P \Rightarrow$ b-a-P-b-a

a

$P \wedge Q \Rightarrow$ a-P-b a-Q-b

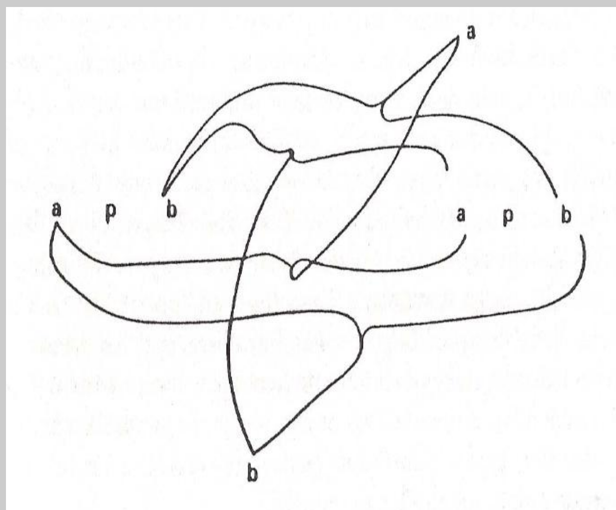
b

b

$P \rightarrow Q \Rightarrow$ a-P-b a-Q-b

a

Beweis: P ↔ P

Nr.	**Ausdruck**	**Regel**
(1)	P ↔ P	Formel
(2)	a-P-b ↔ a-P-b	Def. P
(3)		Def. ↔

CL, S. 57: „P ↔ P ist tautologisch weil b nur mit solchen Pol-paaren verbunden ist, welche aus den entgegengesetzten Polen eines Satzes (nämlich p) bestehen; […].“

Tautologien

φ ist eine Tautologie:= In φ* ist der äußerste b-Pol nur mit innersten entgegengesetzten Polen verknüpft ist.

⇒Eine Tautologie zu sein, ist eine formale Eigenschaft.

⇒ b-Pol wird mit der Definition als Pol verstanden, der die Möglichkeit der Falschheit symbolisiert.

⇒Ein Ausdruck, der die Form einer Tautologie hat, kann nicht als ein Satz interpretiert werden, der falsch ist, ohne dass ein und derselbe atomare Ausdruck mehrdeutig interpretiert wird.

Logische Beweise

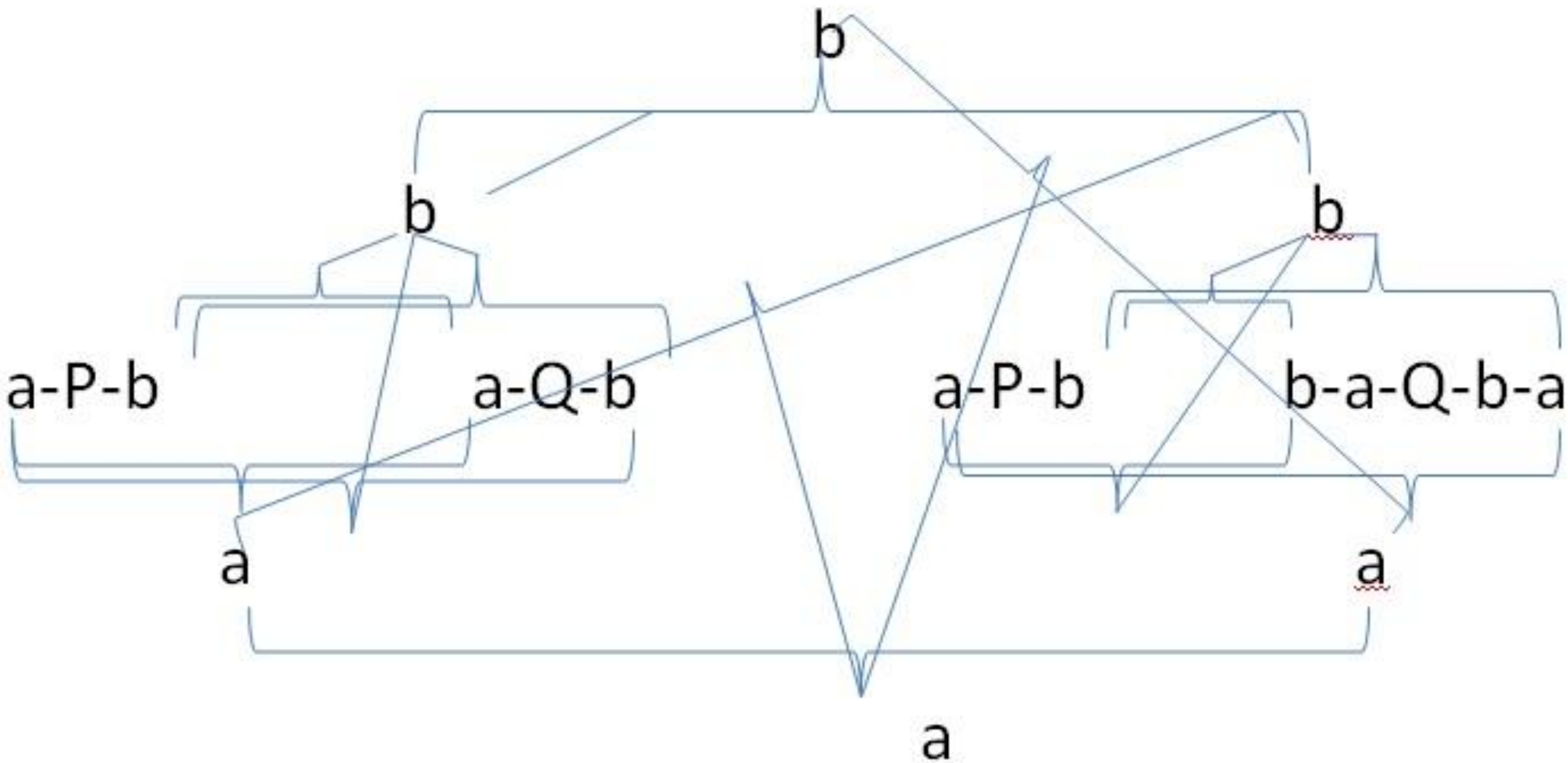
$\varphi \to$ ab-Zeichen $\to$ ab-Polgruppen $\to$ ab-Minpolgruppen $\to$ ab-Primpolgruppen : ab-Symbol φ^*.

Quine McCluskey (1. Schritt)

$\varphi \to$ KDNF $\to$ MINDNF $\to$ RDNF.

Allgemeiner Algorithmus zur Lösung des Äquivalenzproblems.

$(P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q) \Rightarrow$ ab-Zeichen



ab-Polgruppen

a-{a-a-P, a-a-Q, b-a-P, b-b-a-Q},
a-{a-a-P, a-a-Q, b-b-P, b-b-a-Q},
a-{a-a-P, a-a-Q, b-b-P, b-a-b-Q},
a-{a-a-P, a-a-Q, a-a-P, a-a-b-Q},
a-{b-a-P, b-b-Q, a-a-P, a-a-b-Q},
a-{b-b-P, b-a-Q, a-a-P, a-a-b-Q},
a-{b-b-P, b-b-Q, a-a-P, a-a-b-Q},

b-{b-a-P, b-b-Q, b-a-P, b-b-a-Q},
b-{b-a-P, b-b-Q, b-b-P, b-b-a-Q},
b-{b-a-P, b-b-Q, b-b-P, b-a-b-Q},
b-{b-b-P, b-a-Q, b-a-P, b-b-a-Q},
b-{b-b-P, b-a-Q, b-b-P, b-b-a-Q},
b-{b-b-P, b-a-Q, b-b-P, b-a-b-Q},
b-{b-b-P, b-b-Q, b-a-P, b-b-a-Q},
b-{b-b-P, b-b-Q, b-b-P, b-b-a-Q},
b-{b-b-P, b-b-Q, b-b-P, b-a-b-Q}.

Transitivitätsregel

a-{a-P, a-Q, a-P, a-Q},
a-{a-P, a-Q, b-P, a-Q},
a-{a-P, a-Q, b-P, b-Q},
a-{a-P, a-Q, a-P, b-Q},
a-{a-P, b-Q, a-P, b-Q},
a-{b-P, a-Q, a-P, b-Q},
a-{b-P, b-Q, a-P, b-Q},

b-{a-P, b-Q, a-P, a-Q},
b-{a-P, b-Q, b-P, a-Q},
b-{a-P, b-Q, b-P, b-Q},
b-{b-P, a-Q, a-P, a-Q},
b-{b-P, a-Q, b-P, a-Q},
b-{b-P, a-Q, b-P, b-Q},
b-{b-P, b-Q, a-P, a-Q},
b-{b-P, b-Q, b-P, a-Q},
b-{b-P, b-Q, b-P, b-Q}.

Minimalisierung der Polgruppen

1. Eliminiere konträre Polgruppen.
2. Liste einen Pol einer Polgruppe nur einmal auf.
3. Liste eine Polgruppe nur einmal auf.

Min-polgruppen:

a-{a-P, a-Q},
a-{a-P, b-Q},

b-{b-P, a-Q},
a-{b-P, b-Q}.

ab-Symbol

Merging-rule: Streiche entgegengesetzte Pole ansonsten identischer Polgruppen.

Prim-Polgruppen:

a-{a-P},

b-{b-P}.

Paraphrase

φ: $(P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q) \Rightarrow$ a-{a-P}, b-{b-P}

Paraphrase:

Eine Instanz von $(P\wedge Q) \vee (P\wedge\neg Q)$ ist

- *wahr* gdw. P *wahr* ist *und*
- *falsch* gdw. P *falsch* ist.

- Das Resultat eines logischem Beweises ist eine logische Form, die eineindeutig als Darstellung von Wahrheitsbedingungen interpretiert werden kann.

AL-Algorithmus

Mathematica-Implementierung:

1. Primitive Regeln:
   1. Def. Atome (Bipolaritätsregel)
   2. Logische Def. $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ durch ab-Operationen
   3. ab-Regeln (bzw. S-Regeln)
2. Zusammengesetzte Regeln:
   1. Ü-Regel der Übs. für logische Operatoren
   2. ab-Regel der Vereinfachung
   3. I-Regel der iterativen Umformung $\varphi \Rightarrow \varphi^*$

Definitionen

- Def. A : $A = \{a[\{a[A]\}], b[\{b[A]\}]\}$
- Def.¬: $\neg[\{a[PG1],b[PG2]\}] = \{a[PG2],b[PG1]\}$
- Def.∧: $\wedge[\{a[PG1],b[PG2]\},\{a[PG3],b[PG4]\}] = \{a[PG1\times PG3],b[PG1\times PG4,PG2\times PG3,PG2\times PG4]\}$
- Def.∨: $\vee[\{a[PG1],b[PG2]\},\{a[PG3],b[PG4]\}] = \{a[PG1\times PG3,PG1\times PG4,PG2\times PG3],b[,PG2\times PG4]\}$
- Def.→: $\rightarrow[\{a[PG1],b[PG2]\},\{a[PG3],b[PG4]\}] = \{a[PG1\times PG3,PG2\times PG3,PG2\times PG4],b[PG1\times PG4]\}$
- Def.↔: $\leftrightarrow[\{a[PG1],b[PG2]\},\{a[PG3],b[PG4]\}] = \{a[PG1\times PG3,PG2\times PG4],b[PG2\times PG3,PG1\times PG4]\}$

ab-Regeln

S11: {a[A], b[A], ____} = {b}

S12: {{b},___} = {___}

S5: {{a[A]},{b[A]},____}={{a}}

S01: {b,____} = {b}

S02: {a,___}={___}

S2: {P1,P1,____} = {P1,____}

S3: {{a[A],P1___},{b[A],P1___}}= {{P1___}}

S4: {{P1___},{P1___,____},____}={{P1},____}

Äquivalenz von AL_{mL} und AL_F

- Wahrheitswerttabellen und ab-Notation lassen sich ineinander sowie jeweils in logische Äquivalenzumformung von $\varphi \Rightarrow$ DNF übersetzen. Insbesondere:
  - $\varphi \Rightarrow$ a-{PG},b-{PG} $\Leftrightarrow$ $\varphi \Rightarrow \mathrm{RDNF}(A) \vee \mathrm{RDNF}(\neg A)$
- Dieselben Formeln sind allgemeingültig / Theoreme / Tautologien.
- Methode und Verständnis der Klassifikation logischer Formeln unterscheiden sich jedoch grundlegend.

Ausblick

- Relevante Auswirkung hat die Unterscheidung allgemeingültig Formeln / Theoreme / Tautologien erst für die Entscheidbarkeit von FOL-Formeln: Auch hier unterscheidet sich nicht, welche Formeln allgemeingültig / Theoreme / Tautologien genannt werden, aber die Methode der Identifikation von Tautologien im Finitismus widerspricht dem logisch-axiomatischen Unentscheidbarkeitsbeweis.